

SÉRIE
N° D'ORDRE
20

THÈSES

PRÉSENTÉES

A LA FACULTÉ DES SCIENCES DE PARIS

POUR OBTENIR

LE TITRE DE DOCTEUR DE L'UNIVERSITÉ DE PARIS

Par **Gustave DUMAS**

LICENCIÉ EN SCIENCES-MATHÉMATIQUES

1^{re} THÈSE. — SUR LES FONCTIONS A CARACTÈRE ALGÈBRIQUE DANS LE VOISINAGE D'UN POINT DONNÉ.

2^e THÈSE. — PROPOSITIONS DONNÉES PAR LA FACULTÉ.

Soutenues le 29 Juin 1904, devant la Commission d'examen

MM. PAUL APPELL : *Président*

PICARD

HADAMARD

} *Examineurs*

PARIS

LIBRAIRIE SCIENTIFIQUE JULES ROUSSET

1, Rue Casimir-Delavigne et Rue Monsieur-le-Prince, 12 (VI^e)

1904

SÉRIE
N° D'ORDRE
20

THÈSES

PRÉSENTÉES

A LA FACULTÉ DES SCIENCES DE PARIS

POUR OBTENIR

LE TITRE DE DOCTEUR DE L'UNIVERSITÉ DE PARIS

Par **Gustave DUMAS**

LICENCIÉ ÈS SCIENCES-MATHÉMATIQUES.

-
- 1^{re} THÈSE. — SUR LES FONCTIONS A CARACTÈRE ALGÈBREQUE DANS LE VOISINAGE D'UN POINT DONNÉ.
2^e THÈSE. — PROPOSITIONS DONNÉES PAR LA FACULTÉ.
-

Soutenues le 29 Juin 1904, devant la Commission d'examen

MM. PAUL APPELL : *Président*

PICARD
HADAMARD } *Examineurs*



PARIS

LIBRAIRIE SCIENTIFIQUE JULES ROUSSET

1, Rue Casimir-Delavigne et Rue Monsieur-le-Prince, 12 (vi^e)

1904

UNIVERSITÉ DE PARIS

FACULTÉ DES SCIENCES DE PARIS

DOYEN	P. APPELL	Mécanique rationnelle.
DOYEN HONORAIRE	G. DARBOUX	Géométrie supérieure.
PROFESSEURS HONORAIRES {	L. TROOST	
	Ch. WOLF	
	LIPPMANN	Physique.
	BOUTY	Physique.
	BOUSSINESQ	Physique mathématique et Calcul des probabilités.
	PICARD	Analyse supérieure et Algèbre supérieure.
	H. POINCARÉ	Astronomie mathématique et Mécanique céleste.
	YVES DELAGE	Zoologie, Anatomie, Physio- logie comparée.
	G. BONNIER	Botanique.
	DASTRE	Physiologie.
	DITTE	Chimie.
	GIARD	Zoologie, Evolution des êtres organisés.
PROFESSEURS	KOENIGS	Mécanique physique et expé- rimentale.
	VÉLAIN	Géographie physique.
	GOURSAT	Calcul différentiel et Calcul intégral.
	CHATIN	Histologie.
	PELLAT	Physique.
	HALLER	Chimie organique.
	H. MOISSAN	Chimie.
	JOANNIS	Chimie (Enseign. P. C. N.).
	JANET	Physique id.
	WALLERANT	Minéralogie.
	ANDOYER	Astronomie physique.
	PAINLEVÉ	Mathématiques générales.
	HAUG	Géologie.
	N	Zoologie, Anatomie, Physio- logie comparée.
	N	Chimie biologique.
PROFESSEURS ADJOINTS {	PUISEUX	Mécanique et Astronomie.
	RIBAN	Chimie analytique.
	RAFFY	Analyse et Mécanique.
	LEDUC	Physique.
	HADAMARD	Calcul différentiel et Calcul intégral.
SECRETAIRE	A. GUILLET.	

A

MONSIEUR PAUL APPELL

Hommage très respectueux,

GUSTAVE DUMAS.



Digitized by the Internet Archive
in 2026

https://archive.org/details/IA41550422_0005

PREMIÈRE THÈSE

SUR LES FONCTIONS

A

CARACTÈRE ALGÈBRIQUE

DANS LE

VOISINAGE D'UN POINT DONNÉ

INTRODUCTION

Les méthodes générales de la théorie des fonctions, auxquelles se rattacheront toujours les noms illustres de Cauchy, Riemann et Weierstrass, ont aussi leur raison d'être en arithmétique supérieure. C'est ce que M. Hensel a mis très nettement en évidence dans ses cours de Berlin et dans plusieurs publications récentes.

Le but de ce travail est de montrer que les recherches de ce savant éclairent d'un jour nouveau certains points de la théorie des fonctions algébriques et facilitent l'exposition de plusieurs autres.

Dans une première partie, je m'occupe de polynômes en y , $\mathcal{P}(y)$, dont les coefficients, séries ordonnées suivant les puissances croissantes et entières de $(x - a)$, ne contiennent jamais qu'un nombre fini de termes à exposants négatifs. Son objet principal, dans le cas où $\mathcal{P}(y)$ est indécomposable en un produit de polynômes de même nature, est la recherche de la forme nécessaire des séries y qui vérifient formellement l'égalité

$$\mathcal{P}(y) = 0.$$

Dans la seconde partie, je donne le moyen d'obtenir effectivement ces séries y , et je démontre qu'elles sont convergentes lorsque les coefficients de $\mathcal{P}(y)$ le

sont aussi. Ces séries sont alors de véritables fonctions. On peut les désigner sous le nom de fonctions à caractère algébrique dans le voisinage de $x = a$: de là le titre choisi pour cette étude.

Dans la troisième partie enfin, je reprends la solution d'un problème fondamental pour la théorie des fonctions algébriques.

Alors que tant d'excellents auteurs et de si illustres savants se sont depuis si longtemps occupés de ces mêmes sujets, n'y a-t-il peut-être pas quelque présomption à les aborder de nouveau ?

Pour répondre à cette objection, on peut observer que les méthodes de M. Hensel sont suffisamment importantes pour qu'il ne paraisse pas inutile de les appliquer au vaste domaine des fonctions algébriques. Les points de vue ici sont nouveaux, et les résultats, par conséquent, obtenus par des voies nouvelles.

Dans la première partie, j'ai cherché à mettre en évidence certains raisonnements relatifs à des expressions définies d'une manière formelle. C'est pour cela, qu'indépendamment de toute hypothèse de convergence ou de continuité, j'ai résolu, dans les paragraphes 4 et suivants, la question posée, en introduisant un ensemble E assimilable complètement à un corps algébrique, bien que ses éléments n'aient qu'un sens absolument formel. Dans les trois premiers paragraphes, j'ai donné les règles de calcul pour les polynômes en y et examiné certains cas de réductibilité. Ceci m'a conduit, pour les diagrammes de Newton dont l'introduction m'est personnelle dans tout le cours de ce mémoire, aux propositions probablement inédites, des alinéas § 2. 5 et § 3. 3.

Le caractère des deux dernières parties est tout autre. Les considérations formelles y sont abandonnées. Les résultats dans la seconde s'obtiennent en utilisant la méthode de décomposition en facteurs exposée au § 8, et c'est sur cette décomposition toujours possible que reposent les principales déductions de la troisième (1).

Les deux premières parties de ce mémoire m'appartiennent ; mais, dans la troisième, seuls l'exposition et certains points de détail me sont propres. A Berlin, durant le semestre d'été 1902, j'ai suivi les intéressantes leçons de

(1) Comparer les résultats de ma seconde partie avec ceux obtenus par M. Brill dans un mémoire intitulé « *Ueber das Verhalten einer Function von zwei Veränderlichen in der Umgebung einer Nullstelle* » (*Sitzungsberichte der Münchener Akademie* t. XXI). Mes recherches sont indépendantes des siennes, et j'étais en possession de tous mes résultats, quand, par une courte analyse des *Fortschritte der Mathematik*, j'ai eu connaissance du travail indiqué.

M. Hensel sur l'arithmétique supérieure ⁽¹⁾. Les notions d'irréductibilité, d'équivalence et de décomposition en facteur, dans le domaine d'un nombre premier, sont ici simplement transportées. Mon ensemble E est l'analogue du corps que M. Hensel fait correspondre à tout nombre premier ; mais mes considérations sont un peu différentes, et certaines des propositions établies l'ont été d'après MM. Dedekind et Weber. Le théorème fondamental du § 5. 3 a son origine dans le cours de M. Hensel ; mais ma démonstration, qui repose en dernier ressort sur mes propositions relatives aux diagrammes de Newton, est distincte de la sienne. C'est enfin par des raisonnements semblables aux siens qu'au § 6 j'ai pu montrer qu'il existait dans E des expressions dont l'ordre par rapport à $(x - a)$ était égal à $\frac{1}{n}$.

La construction au § 12 d'un certain système fondamental pour $x = a$ est l'élément essentiel de la troisième partie. Abstraction faite du mode d'établissement des fonctions π , § 12. 5, cette construction est identique à celle de M. Hensel pour la question parallèle de théorie des nombres. Pour résoudre le problème fondamental, je n'ai fait qu'ajouter les quelques développements du § 13 inutiles en arithmétique supérieure. Cette solution est inédite malgré ses analogies avec celle que MM. Hensel et Landsberg ont donnée dans leur grand traité. Comme elle constitue une application intéressante des principales propositions des deux premières parties, j'ai pensé qu'il y aurait peut-être quelque avantage à la faire connaître.

Qu'il me soit permis, en terminant, d'adresser à M. Hensel mes sincères remerciements pour ses conseils et son bienveillant intérêt.

(1) Le cours de M. Hensel n'a pas été publié, mais le travail inséré récemment dans le *Journal de Crelle* (t. CXXVII) et intitulé « *Neue Grundlagen der Arithmetik* » s'y rapporte directement. Ce mémoire sera bientôt suivi d'un autre touchant aux mêmes questions.

PREMIÈRE PARTIE

§ 1. — Les polynômes en y , définitions préliminaires et règles de calcul.

1. — Dans le courant de ce travail, nous aurons à nous occuper de polynômes de la forme

$$\mathcal{P}(y) = A_0 y^n + A_1 y^{n-1} + \dots + A_n,$$

dans lequel les coefficients A_i seront des séries ordonnées suivant les puissances croissantes et entières de $(x - a)$:

$$A_i = a_{\rho_i} (x - a)^{\rho_i} + a_{\rho_i + 1} (x - a)^{\rho_i + 1} + \dots$$

$(i = 0, 1, 2, \dots, n)$

ne contenant jamais qu'un nombre fini de puissances négatives. Suivant que le coefficient A_i contiendra ou non des puissances négatives de $(x - a)$, nous dirons que ce coefficient est à caractère rationnel ou entier, sous-entendant ainsi les mots : dans le voisinage de $x = a$. Souvent aussi nous exprimerons cela plus brièvement, en disant simplement séries rationnelles et séries entières.

Relativement à la convergence des séries représentées par les A_i , nous ne faisons dans la première partie de ce travail aucune hypothèse. Les A_i peuvent ou non être des séries convergentes ; cela importe peu, vu le caractère purement formel des opérations que nous allons développer.

Aux expressions que nous venons de définir, nous donnerons le nom de polynômes en y et les représenterons en général par des symboles tels que $\mathcal{P}(y)$, $f(y)$, $g(y)$, etc., dans lesquels ne figurera pas la variable entrant dans les coefficients.

Par polynômes entiers en x , respectivement en y , nous entendrons en revanche des polynômes à coefficients constants dépendant de la seule variable x , respectivement y .

Les mots : polynômes entiers ou rationnels en y et x , ou plus brièvement : polynômes en y et x désigneront des polynômes en y dont les coefficients seront des polynômes entiers ou des fonctions rationnelles de x . Ces expressions seront représentées par des notations telles que $P(y, x)$, $F(y, x)$, ..., $f(y, x)$, dans lesquelles les deux variables y et x seront toujours mises en évidence.

Enfin, par premiers termes d'un polynôme en y , $\mathcal{P}(y)$, il faudra toujours comprendre le polynôme (entier ou rationnel) en y et x que l'on obtient en supprimant dans chacun des coefficients de $\mathcal{P}(y)$ toutes les puissances de $(x - a)$ dont l'exposant est supérieur à un entier donné.

2. *Égalité de deux polynômes en y .* — Nous disons que deux polynômes en y , $\mathcal{P}(y)$ et $\mathcal{Q}(y)$ sont égaux, ce qui s'écrira

$$(1) \quad \mathcal{P}(y) = \mathcal{Q}(y) \quad [x - a],$$

si, si loin que l'on poursuive la comparaison, les coefficients des mêmes puissances de y dans $\mathcal{P}(y)$ et $\mathcal{Q}(y)$ sont identiques.

Introduisant la notion de congruence, nous pouvons mettre cette définition sous une forme beaucoup plus précise.

Tout d'abord étant donnés deux polynômes en y , $\mathcal{P}(y)$ et $\mathcal{Q}(y)$ pouvant d'ailleurs se réduire l'un ou l'autre ou tous deux à des polynômes en y et x , nous disons que l'on a

$$(2) \quad \mathcal{P}(y) \equiv \mathcal{Q}(y) \quad \text{mod. } (x - a)^M$$

(M étant un entier positif quelconque), si, faisant abstraction dans les coefficients de $\mathcal{P}(y)$ et $\mathcal{Q}(y)$ des puissances de $(x - a)$ supérieures à la $(M - 1)^{\text{ème}}$, ces coefficients sont identiques. Cette notion de congruence s'étend naturellement à deux séries de puissances entières de $(x - a)$.

Ceci dit, l'égalité (1) signifie simplement que la congruence (2) a lieu quelque grand que soit l'entier positif M .

On voit que deux polynômes en y égaux à un troisième sont égaux entre eux.

La définition de l'addition, de la soustraction, de la multiplication de deux polynômes en y est immédiate. Par exemple l'égalité

$$\mathcal{P}(y) = f(y) + g(y) \quad [x - a],$$

signifie que, quelque grand que soit l'entier positif M , on a toujours

$$\mathcal{P}(y) \equiv f(y) + g(y) \quad \text{mod. } (x - a)^M.$$

On dira qu'un polynôme $\mathcal{P}(y)$ est divisible par un autre $f(y)$, s'il en existe un troisième $g(y)$ tel que

$$\mathcal{P}(y) = f(y) g(y) \quad [x - a],$$

c'est-à-dire tel que

$$\mathcal{P}(y) \equiv f(y) g(y) \quad \text{mod. } (x - a)^M,$$

quelque grand que soit l'entier positif M .

Enfin, un polynôme en y sera dit de *degré* n , si la plus haute puissance de y qu'il renferme est de degré n .

3. *Irréductibilité dans le voisinage de $x = a$.* — Un polynôme en y , $\mathcal{P}(y)$, étant donné, il peut se faire qu'il existe deux ou plusieurs polynômes $f(y)$, $g(y)$ de degrés respectivement inférieurs à $\mathcal{P}(y)$ et tels que l'on ait

$$\mathcal{P}(y) = f(y) g(y) \quad [x - a].$$

Lorsqu'une pareille décomposition peut se faire, dans laquelle ni $f(y)$, ni $g(y)$ ne sont supposés se réduire à des séries rationnelles en $(x - a)$, nous disons que $\mathcal{P}(y)$ est *réductible*. Il sera *irréductible* dans le cas contraire. Cette définition, qui s'étend naturellement aux polynômes entiers en y et x , sous-entend les mots : « dans le voisinage de $x = a$ ». Un polynôme réductible, au sens usuel du mot, l'est aussi dans le voisinage de $x = a$.

4. — De cette notion d'irréductibilité, on passe immédiatement à celle de décomposition d'un polynôme en y en ses facteurs irréductibles. Une telle décomposition est toujours uniforme, mais, avant de le faire voir, il est nécessaire de revenir encore sur la divisibilité.

Tout d'abord nous remarquons que, par un calcul formel, on peut toujours et d'une manière unique déterminer une série C_0 rationnelle en $(x - a)$, telle que, A_0 et B_0 tant deux autres séries analogues, on ait

$$A_0 = C_0 B_0.$$

C'est cette série C_0 que nous représentons par le symbole $\left(\frac{A_0}{B_0}\right)$, dans lequel la parenthèse doit rappeler que ce n'est pas le quotient $\frac{A_0}{B_0}$ que nous considérons, mais le développement que nous lui faisons correspondre. Ce genre de notation nous servira plusieurs fois dans la suite.

Soient maintenant deux polynômes en y :

$$\mathcal{P}(y) = A_0 y^m + A_1 y^{m-1} + \dots + A_m$$

$$\mathcal{Q}(y) = B_0 y^n + B_1 y^{n-1} + \dots + B_n;$$

soit en outre $m > n$, A_0 et B_0 n'étant pas nuls identiquement. La différence, autre polynôme en y

$$\mathcal{P}_1(y) = \mathcal{P}(y) - \left(\frac{A_0}{B_0}\right) y^{m-n} \mathcal{Q}(y),$$

n'est plus que de degré m_1 inférieur à m , soit :

$$\mathcal{P}_1(y) = A'_0 y^{m_1} + A'_1 y^{m_1-1} + \dots + A'_{m_1}, \quad m_1 < m.$$

Des relations (4) l'on déduit immédiatement qu'entre $\mathcal{F}_r(y)$, $\mathcal{F}_0(y)$, $\mathcal{F}_1(y)$ il existe une relation

$$(5) \quad \mathcal{F}_0(y) \mathcal{R}_1(y) + \mathcal{F}_1(y) \mathcal{R}_0(y) = \mathcal{F}_r(y) \quad [x - a]$$

dans laquelle $\mathcal{R}_0(y)$ et $\mathcal{R}_1(y)$ sont des polynômes dont les degrés respectifs sont au plus égaux à $m_0 - 1$ et $m_1 - 1$.

Celle-ci se transforme, dans le cas où $\mathcal{F}_r(y)$ se réduit à une constante ou à une série A rationnelle en $(x - a)$. On obtient, en effet, en multipliant ses deux membres par la série $\left(\frac{1}{A}\right)$:

$$(6) \quad \mathcal{F}_0(y) \mathcal{M}_1(y) + \mathcal{F}_1(y) \mathcal{M}_0(y) = 1 \quad [x - a]$$

où $\mathcal{M}_0(y)$ et $\mathcal{M}_1(y)$ sont encore des polynômes en y de même degré respectivement que $\mathcal{R}_0(y)$ et $\mathcal{R}_1(y)$.

Cette relation (6) exprime la condition nécessaire et suffisante pour que $\mathcal{F}_0(y)$ et $\mathcal{F}_1(y)$ soient sans diviseur commun.

5. — Nous avons maintenant plusieurs propositions sur la démonstration desquelles il est inutile que nous nous arrêtions. Celles-ci s'établissent en effet de la même manière que leurs correspondantes dans la théorie des polynômes entiers dépendant d'une seule variable.

Si A_0 désigne le coefficient de la plus haute puissance de y dans un polynôme $\mathcal{F}(y)$, tout diviseur de $\mathcal{F}(y)$ est diviseur du polynôme $\left(\frac{1}{A_0}\right) \mathcal{F}(y)$, et réciproquement.

Si $\mathcal{F}(y)$ est irréductible, tout autre polynôme $\mathcal{Q}(y)$ est, ou bien divisible par $\mathcal{F}(y)$, ou premier relatif avec lui.

Lorsqu'un produit $\mathcal{Q}(y) \mathcal{R}(y)$ est divisible par un polynôme irréductible $\mathcal{F}(y)$, l'un au moins des deux polynômes $\mathcal{Q}(y)$ ou $\mathcal{R}(y)$ sera divisible par $\mathcal{F}(y)$.

De cette dernière proposition résulte immédiatement le fait que tout polynôme en y n'est décomposable que d'une seule façon en un produit de facteurs irréductibles, dans lesquels les coefficients de la plus haute puissance de y sont égaux à l'unité.

6. — Un polynôme en y , $\mathcal{F}(y)$, n'admet que des diviseurs *simples*, si, mis sous la forme du produit de ses facteurs irréductibles :

$$\mathcal{F}(y) = A \mathcal{F}_1^{r_1}(y) \mathcal{F}_2^{r_2}(y) \dots \mathcal{F}_k^{r_k}(y) \quad [x - a]$$

tous les exposants $r_1, r_2, \dots, r_k$ se réduisent à l'unité.

Si l'on a

$$\mathcal{F}(y) = (f(y))^r g(y) \quad [x - a]$$

l'on a également

$$(7) \quad \mathcal{F}(y) \equiv [f_1(y, x)]^r g_1(y, x) \quad \text{mod. } (x - a)^M$$

où $f_1(y, x)$ et $g_1(y, x)$ sont les polynômes en y et x définis par les congruences

$$\left. \begin{aligned} f(y) &\equiv f_1(y, x) \\ g(y) &\equiv g_1(y, x) \end{aligned} \right\} \quad \text{mod. } (x - a)^M$$

M est ici un entier positif susceptible d'être choisi aussi grand que l'on veut.

On aura de même, en prenant dans les deux membres de (7) la dérivée par rapport à y ,

$$\mathcal{F}'_y(y) \equiv [f_1(y, x)]^{r-1} \left(r g_1 \frac{\partial f_1}{\partial y} + f_1 \frac{\partial g_1}{\partial y} \right) \quad \text{mod. } (x - a)^M$$

d'où il se déduit immédiatement que tout diviseur de $\mathcal{F}(y)$, multiple d'ordre r , est diviseur multiple d'ordre $r - 1$ de $\mathcal{F}'_y(y)$.

Nous voyons donc que de $\mathcal{F}(y)$ et $\mathcal{F}'_y(y)$ se déduit facilement le polynôme $\mathcal{R}(y)$ égal au produit des diviseurs irréductibles distincts de $\mathcal{F}(y)$. Il suffit pour cela de chercher le plus grand commun diviseur de $\mathcal{F}(y)$ et $\mathcal{F}'_y(y)$, puis de diviser $\mathcal{F}(y)$ par celui-ci. Le quotient est alors le polynôme $\mathcal{R}(y)$ demandé.

Les résultats de tout ce paragraphe restent les mêmes, lorsque les coefficients des polynômes en y sont des séries rationnelles en $\frac{1}{x}$. Ceci se présente dans l'étude des fonctions à caractère algébrique dans le voisinage de $x = \infty$. Les déductions qui suivent, à la condition de supposer $(x - a)$ remplacé par $\frac{1}{x}$, sont entièrement valables dans ce cas également. Enfin, pour simplifier, nous écrirons toujours x à la place de $(x - a)$ dans les deux premières parties de ce travail.

§ 2. — Diagrammes de Newton.

1. — Tout polynôme $\mathcal{F}(y)$ dont les coefficients sont des séries rationnelles en x peut se mettre sous la forme

$$\mathcal{F}(y) = \sum A_{\alpha\beta} x^\alpha y^\beta$$

et il est possible, après avoir choisi dans un plan quelconque deux axes rectangulaires, de faire correspondre à celui-ci un ensemble de points P dont les abscisses et les ordonnées sont respectivement égales à β et α .

Ces points, supposés construits en commençant par ceux d'ordonnée minimum, sont situés sur le contour ou au-dessus d'une certaine ligne brisée L, dite polygone de Newton relatif au polynôme considéré. Celle-ci s'obtient d'après un procédé connu sur lequel nous ne pensons pas qu'il soit utile de revenir ici.

On dira des points P qu'ils sont *représentatifs* des termes de $\mathcal{F}(y)$ et que L est le *contour* relatif à ce même polynôme.

Nous ne nous occuperons ici que de polynômes en y de la forme

$$(1) \quad \mathcal{F}(y) = y^n + A_1 y^{n-1} + \dots + A_n,$$

dont les coefficients

$$(2) \quad A_i = \alpha_{\rho_i} x^{\rho_i} + \alpha_{\rho_i+1} x^{\rho_i+1} + \dots$$

sont à caractère entier ($\rho_i \geq 0$) dans le voisinage de $x = 0$. A ceux-ci correspondront des diagrammes tels que celui donné dans la figure 1. Dans celle-ci, qui du reste servira de base à nos déductions, nous avons supposé que le premier côté $A_0 A_1$ du contour L ne coïncidait pas avec l'axe des abscisses, alors que le contraire a lieu également si l'un des ρ_i se réduit à zéro.

Le contour L, ici $A_0 A_1 \dots A_6$, peut, suivant le polynôme auquel il appartient, se réduire à une droite. Nous dirons alors qu'il est *rectiligne* ; dans le cas contraire, *brisé*.

Quelques définitions sont maintenant nécessaires.

2. — Par *inclinaison* d'un quelconque des côtés de L, nous entendons la tangente de l'angle aigu formé par ce côté avec l'axe des abscisses.

Dans la figure 1, par exemple, le côté $A_2 A_3$ est d'inclinaison égale à $\frac{\alpha_3}{\beta_3}$.

Si en outre nous mettons les rapports $\frac{\alpha_i}{\beta_i}$ sous leur forme irréductible $\frac{p_i}{q_i}$, nous aurons toujours, lorsque L sera brisé,

$$(3) \quad \frac{p_1}{q_1} < \frac{p_2}{q_2} < \frac{p_3}{q_3} < \dots$$

L'indice i , comme d'ailleurs dans la suite, se rapporte au $i^{\text{ième}}$ côté $A_{i-1} A_i$ de L.

3. — Si, dans la figure 1, parallèlement à l'un des côtés du contour, $A_2 A_3$ par exemple, et au-dessus nous menons des droites par tous les points à cotes entières, nous obtenons une série de parallèles que, à partir de $A_2 A_3$ pris pour Δ_0 , nous désignons successivement par $\Delta_1, \Delta_2, \Delta_3, \dots$. Relativement à ces droites parallèles à l'un des côtés du contour, nous introduisons ici une notation destinée à simplifier les énoncés :

Les congruences

$$\mathcal{F}(y) \equiv 0 \quad \text{mod. } \Delta_k$$

$$\mathcal{F}(y) \equiv \mathcal{G}(y) \quad \text{mod. } \Delta_k$$

signifieront que tous les points représentatifs des polynômes $\mathcal{F}(y)$, respectivement $\mathcal{F}(y) - \mathcal{G}(y)$ sont situés *sur* Δ_k ou *au-dessus*. Cette convention s'applique aussi bien à des polynômes en y qu'à des polynômes entiers en y et x .

4. — La distance, comptée sur l'axe des ordonnées, de deux droites consécutives

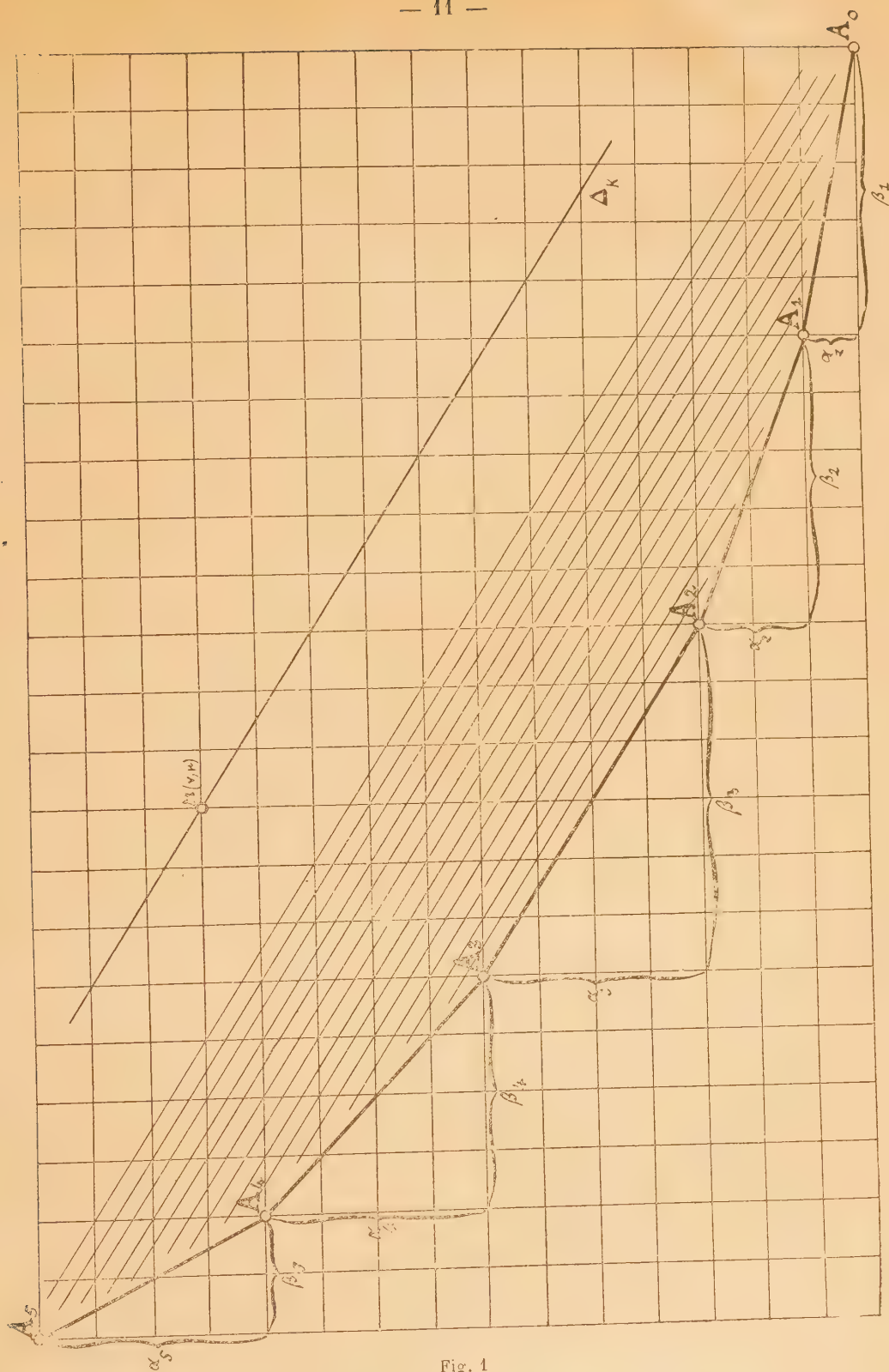


Fig. 1

quelconques Δ_k sera égale à $\frac{1}{q_3}$. Si deux de ces droites en effet passent l'une par le point (ν, μ) l'autre par le point (ν', μ') , la quantité

$$\left(\mu + \nu \frac{p_3}{q_3}\right) - \left(\mu' + \nu' \frac{p_3}{q_3}\right) = (\mu - \mu') + (\nu - \nu') \frac{p_3}{q_3}$$

sera la différence de leurs ordonnées à l'origine, tandis qu'il existe toujours des nombres entiers $\mu - \mu'$ et $\nu - \nu'$ tels que

$$(\mu - \mu')q_3 + (\nu - \nu')p_3 = 1.$$

Enfin, la figure 1 fait voir que l'ordonnée à l'origine de la droite Δ_k n'est autre chose que celle de Δ_0 augmentée de $\frac{k}{q_3}$. Elle est donc égale à

$$(\alpha_1 + \alpha_2) + (\beta_5 + \beta_4 + \beta_3) \frac{p_3}{q_3} + \frac{k}{q_3},$$

de sorte que l'on a, en désignant par (ν, μ) un point de Δ_k ,

$$(4) \quad (\alpha_1 + \alpha_2)q_3 + (\beta_5 + \beta_4 + \beta_3)p_3 + k = \mu q_3 + \nu p_3.$$

5. — Nous considérons maintenant un certain nombre de polynômes en y , $\mathcal{F}_1(y)$, $\mathcal{F}_2(y)$, ... $\mathcal{F}_k(y)$, dont les contours, dans les diagrammes correspondants, sont tous rectilignes, et d'inclinaisons respectivement égales à $\frac{p_i}{q_i}$. Nous nous demandons quel sera le contour correspondant au produit :

$$\mathcal{Q}(y) = \mathcal{F}_1 \mathcal{F}_2 \dots \mathcal{F}_k.$$

A cet effet, nous superposerons, après les avoir rapportés à un même système d'axes $O\beta$, $O\alpha$ dans une même figure (*fig. 2*), les diagrammes relatifs à chacun des polynômes $\mathcal{F}_1(y)$, $\mathcal{F}_2(y)$, ... $\mathcal{F}_k(y)$ et $\mathcal{Q}(y)$; n_i étant le degré de $\mathcal{F}_i(y)$, $A_{\alpha_i \beta_i} \alpha^{\alpha_i} y^{\beta_i}$ l'un quelconque de ses termes et $A_i B_i$ son contour rectiligne, nous remarquons que tout d'abord nous avons, pour chacun des $i = 1, 2 \dots k$:

$$\frac{\alpha_i}{n_i - \beta_i} \leq \frac{p_i}{q_i} = \text{tg } \varphi_i$$

$$0 \leq \beta_i \leq n_i$$

On voit d'autre part que les coordonnées β , α d'un point représentatif M de $\mathcal{Q}(y)$ respectivement égales aux deux sommes

$$\sum_{i=1}^k \beta_i \quad \text{et} \quad \sum_{i=1}^k \alpha_i$$

se transforment en

$$\sum_{i=1}^k (n_i - \beta_i) \quad \text{et} \quad \sum_{i=1}^k \alpha_i$$

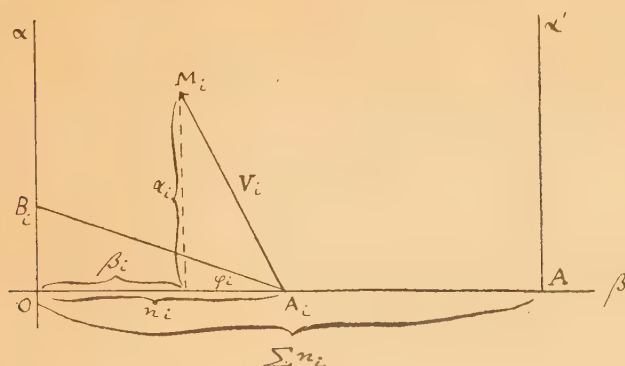


Fig. 2

lorsqu'on transporte l'axe des α parallèlement à lui-même au point A d'abscisse égale à

$$\sum_{i=1}^k n_i.$$

Si donc nous prenons, dans chacun des $\mathcal{F}_i(y)$, le terme dont le point représentatif est M_i , nous obtiendrons celui de leur produit en cherchant l'extrémité de la résultante des vecteurs V_i transportés parallèlement en A. On voit dès lors que :

Le contour relatif à tout polynôme $\mathcal{Q}(y)$, produit de facteurs $\mathcal{F}_i(y)$ dont les contours respectifs, ici A_iB_i , sont rectilignes, s'obtient par addition géométrique dans l'ordre des inclinaisons croissantes des segments A_iB_i transportés parallèlement en A.

Nous sommes maintenant à même d'énoncer les propositions suivantes :

6. — Tout polynôme en y , puissance entière d'un polynôme en y dont le contour est rectiligne, admet lui-même un contour rectiligne.

7. — Lorsqu'un polynôme en y admet un contour rectiligne, chacun de ses diviseurs admet aussi un contour rectiligne de même inclinaison.

De ceci résulte immédiatement que deux polynômes en y dont les contours se réduisent à des droites, ne peuvent avoir de diviseur commun que si les deux contours ont même inclinaison.

8. — Dans tout polynôme $\mathcal{F}(y)$, les termes, dont les points représentatifs sont situés sur l'un des côtés du contour, constituent un certain polynôme entier en y et x . Celui-ci, dans le cas de la figure 1, relativement à A_2A_3 , peut s'écrire

$$y^{\beta_4 + \beta_5} (\alpha_0 y^{\beta_3} + a_1 y^{(\lambda_3 - 1)q_3} x^{p_3} + \dots + a_j y^{(\lambda_3 - j)q_3} x^{jp_3} + \dots + a_{\lambda_3} x^{\alpha_3}) x^{\alpha_1 + \alpha_2}.$$

Les coefficients a_0 et a_{λ_3} sont certainement différents de zéro, et l'on a $\lambda_3 p_3 = \alpha_3$, $\frac{p_3}{q_3}$ étant la forme réduite de l'inclinaison $\frac{\alpha_3}{\beta_3}$.

A chaque côté $A_{i-1} A_i$ d'un contour correspond ainsi un polynôme entier en y et x ,

$$(5) \quad f^{(i)}(y, x) = y^{\beta_i} + \dots + \frac{a_j}{a_0} y^{(\lambda_i - j)q_i} x^{jp_i} + \dots + \frac{a_{\lambda_i}}{a_0} x^{\alpha_i},$$

dont le dernier coefficient $\frac{a_{\lambda_i}}{a_0}$ ne peut être égal à zéro. Si le contour L relatif à un polynôme $\mathfrak{F}(y)$ comprend k côtés et si $f^{(1)}(y, x) \dots f^{(k)}(y, x)$ sont les k polynômes entiers relatifs à ceux-ci, l'on pourra toujours écrire

$$(6) \quad \mathfrak{F}(y) = f^{(1)}(y, x) f^{(2)}(y, x) \dots f^{(k)}(y, x) + \sum A_{\alpha\beta} x^\alpha y^\beta,$$

où la somme $\sum$ s'étendra à un ensemble de termes dont tous les points représentatifs seront situés *au-dessus* de L.

Le produit $f^{(1)} f^{(2)} \dots f^{(k)}$ a, d'après (5), en effet même contour L que $\mathfrak{F}(y)$ et ceux de ses termes qui correspondent à des points de L sont identiques aux termes analogues de $\mathfrak{F}(y)$.

9. — Dans le cas de L rectiligne, la formule (6) s'écrira

$$\mathfrak{F}(y) = f(y, x) + \sum A_{\alpha\beta} x^\alpha y^\beta,$$

ou encore à cause de la forme de $f(y, x)$ donnée par (5),

$$(7) \quad \mathfrak{F}(y) = (y^q + a_1 x^p)^{r_1} (y^q + a_2 x^p)^{r_2} \dots (y^q + a_j x^p)^{r_j} + \sum A_{\alpha\beta} x^\alpha y^\beta.$$

Ici les $a_1, a_2, \dots, a_j$ sont des quantités distinctes et $r_1, r_2, \dots, r_j$ des entiers vérifiant la relation

$$(8) \quad n = (r_1 + r_2 + \dots + r_j)q,$$

où n est le degré de $\mathfrak{F}(y)$.

10. — Si enfin L se confond avec l'axe des abscisses, q devient égal à l'unité, p égal à zéro, et l'on a plus simplement encore

$$(9) \quad \mathfrak{F}(y) = (y + a_1)^{r_1} (y + a_2)^{r_2} \dots (y + a_j)^{r_j} + \sum A_{\alpha\beta} x^\alpha y^\beta.$$

§ 3. — Examen de certains cas de réductibilité.

1. — Etant donnés deux polynômes entiers en y et x

$$f(y, x) = a_0 y^n + a_1 y^{n-1} + \dots + a_n$$

$$g(y, x) = b_0 y^m + b_1 y^{m-1} + \dots + b_m$$

où les a_i et b_i sont par conséquent des polynômes entiers en x à coefficients constants, on pourra toujours trouver deux autres polynômes entiers en y et x , $f_1(y, x)$ et $g_1(y, x)$ de degrés par rapport à y au plus égaux respectivement à $m-1$ et $n-1$ et tels que, $\mathcal{R}(f, g)$ désignant le résultant de f et g l'on ait :

$$(1) \quad fg_1 + gf_1 = \mathcal{R}(f, g).$$

Cette égalité est une simple conséquence de la suivante (écrite pour $m=3, n=2$), dont le premier membre est $\mathcal{R}(f, g)$:

$$\begin{vmatrix} a_0 & a_1 & a_2 & a_3 & 0 \\ 0 & a_0 & a_1 & a_2 & a_3 \\ b_0 & b_1 & b_2 & 0 & 0 \\ 0 & b_0 & b_1 & b_2 & 0 \\ 0 & 0 & b_0 & b_1 & b_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_0 & a_1 & a_2 & a_3 & (a_0 y^3 + a_1 y^2 + a_2 y + a_3)y \\ 0 & a_0 & a_1 & a_2 & (a_0 y^3 + a_1 y^2 + a_2 y + a_3) \\ b_0 & b_1 & b_2 & 0 & (b_0 y^2 + b_1 y + b_2)y^2 \\ 0 & b_0 & b_1 & b_2 & (b_0 y^2 + b_1 y + b_2)y \\ 0 & 0 & b_0 & b_1 & (b_0 y^2 + b_1 y + b_2) \end{vmatrix}$$

2. — Le résultant de deux polynômes, l'un à coefficients constants

$$f(y) = a_0 y^{\lambda q} + a_q y^{(\lambda-1)q} + \dots + a_{iq} y^{(\lambda-i)q} + \dots + a_{\lambda q},$$

l'autre à coefficients dépendant de x mais de la forme

$$g(y, x) = b_0 y^m + b_1 x^k y^{m-1} + \dots + b_i x^{ik} y^{m-i} + \dots + b_m x^{mk}$$

où les b_i sont des constantes, est un polynôme en x où n'entrent que des puissances de x^q .

Il en est de même du résultant de $f(y)$ et du polynôme

$$h(y, x) = b_0 x^{mk} y^m + b_1 x^{(m-1)k} y^{m-1} + \dots + b_i x^{(m-i)k} y^{m-i} + \dots + b_m.$$

Mettant en évidence les coefficients des termes qui manquent dans $f(y)$, nous pouvons dire qu'un terme quelconque du résultant de f et g est de la forme

$$a_0^{\nu_0} a_1^{\nu_1} a_2^{\nu_2} \dots a_{\lambda q}^{\nu_{\lambda q}} b_0^{\mu_0} b_1^{\mu_1} \dots b_m^{\mu_m} x^{k(\mu_1 + 2\mu_2 + \dots + m\mu_m)}$$

où d'après une proposition connue

$$1\nu_1 + 2\nu_2 + \dots + \lambda q\nu_{\lambda q} + 1\mu_1 + 2\mu_2 + \dots + m\mu_m = \lambda qm.$$

Mais ici dans ce terme général, tous les α_i dont l'indice n'est pas divisible par q sont nuls, de sorte que, si pour ces α_i là nous supposons l'exposant ν_i différent de zéro, les termes où figurerait $a_i^{\nu_i}$ se réduiraient à zéro. Il en résulte que le résultant de f et g se réduit à une somme de termes de la forme

$$a_0^{\nu_0} a_q^{\nu_q} \dots a_{\lambda q}^{\nu_{\lambda q}} b_0^{\mu_0} b_1^{\mu_1} \dots b_m^{\mu_m} x^{k(\mu_1 + 2\mu_2 + \dots + m\mu_m)},$$

dans laquelle

$$q\nu_q + 2q\nu_{2q} + \dots + \lambda q\nu_{\lambda q} + \mu_1 + 2\mu_2 + \dots + m\mu_m = \lambda qm.$$

On a donc $\mu_1 + 2\mu_2 + \dots + m\mu_m$ divisible par q , ce qui suffit pour établir la première partie de la proposition.

Si, au lieu du polynôme $g(y, x)$ nous considérons le polynôme $h(y, x)$, un terme quelconque du résultant de f et h est de la forme

$$a_0^{\nu_0} a_q^{\nu_q} \dots a_{\lambda q}^{\nu_{\lambda q}} b_0^{\mu_0} b_1^{\mu_1} \dots b_m^{\mu_m} x^{k(\mu_0 m + \mu_1(m-1) + \dots + \mu_{m-1}1)}$$

où

$$\lambda q\nu_0 + (\lambda - 1)q\nu_q + \dots + q\nu_{(\lambda-1)q} + m\mu_0 + (m-1)\mu_1 + \dots + 1\mu_{m-1} = \lambda qm.$$

On en déduit $m\mu_0 + \dots + 1\mu_{m-1}$ divisible par q , ce qui prouve qu'ici aussi le résultant de f et h est fonction de x^q .

Ceci dit, nous passons à l'étude des divers cas de réductibilité que nous avons à examiner.

3. — *Tout polynôme en y , $\mathfrak{F}(y)$, dont le contour correspondant n'est pas rectiligne, est nécessairement réductible. A l'un quelconque des côtés du contour, $A_{i-1}A_i$ par exemple, correspond un diviseur de $\mathfrak{F}(y)$ dont le contour se réduit à une droite de même longueur et de même inclinaison que $A_{i-1}A_i$.*

Nous avons là la proposition réciproque de celle que nous avons énoncée au § 2. 5.

Notre démonstration, bien qu'elle soit absolument générale pour les polynômes (1)

2. 1) que nous considérons, se rapporte à la figure 1 du § 2. Le diviseur que nous cherchons ici correspond au troisième côté A_2A_3 du contour et l'on a [§ 2. (3)]

$$(2) \quad \frac{p_1}{q_1} < \frac{p_2}{q_2} < \frac{p_3}{q_3} < \frac{p_4}{q_4} < \frac{p_5}{q_5}.$$

Comme polynôme entier (§ 2. 8) correspondant au côté $A_{i-1} A_i$, nous avons

$$f^{(i)}(y, x) = y^{2i} + \dots + \frac{a_k^{(i)}}{a_{\lambda_{i-1}}^{(i+1)}} y^{(\lambda_i - k)q_i} x^{kp_i} + \dots + \frac{a_{\lambda_i}^{(i)}}{a_{\lambda_{i-1}}^{(i+1)}} x^{\lambda_i p_i}$$

dans lequel les coefficients $a_{\lambda_i}^{(i)}$ et $a_{\lambda_{i-1}}^{(i+1)}$ sont certainement différents de zéro.

Si maintenant nous posons :

$$\begin{aligned} f^{(3)}(y, x) &= f(y, x) \\ f^{(1)}(y, x) f^{(2)}(y, x) f^{(4)}(y, x) f^{(5)}(y, x) &= g(y, x) \end{aligned}$$

et utilisons les notations définies (§ 2. 3), nous avons en vertu de (6) du § 2. 8

$$(3) \quad \mathfrak{F}(y) \equiv f(y, x) g(y, x) \quad \text{mod. } \Delta_1.$$

En outre, n , m et l désignant les degrés respectifs de $\mathfrak{F}(y)$, $f(y, x)$ et $g(y, x)$ par rapport à y , on a d'une part

$$n = m + l,$$

tandis que d'autre part la différence $\mathfrak{F} - fg$ est en y au plus de degré égal à $n - 1$.

Pour établir la réductibilité de $\mathfrak{F}(y)$, nous montrerons, en supposant que dans l'espace compris (fig. 1) entre Δ_0 et Δ_k ne se trouve aucun point représentatif de la différence $\mathfrak{F} - fg$, qu'il existe deux polynômes entiers $f_k(y, x)$ et $g_k(y, x)$ de degrés respectivement au plus égaux à $m - 1$ et $l - 1$ tels que

$$(4) \quad \mathfrak{F}(y) \equiv [f(y, x) + f_k(y, x)] [g(y, x) + g_k(y, x)] \quad \text{mod. } \Delta_{k+1}.$$

Puis, en faisant l'hypothèse que les points représentatifs de $\mathfrak{F} - (f + f_k)(g + g_k)$ sont seuls situés sur la droite Δ_{k+h} ou au-dessus ($h > 0$), nous verrons qu'il existe de nouveau deux autres polynômes $f_{k+h}(y, x)$ et $g_{k+h}(y, x)$ de degrés au plus égaux, par rapport à y , à $m - 1$ et $l - 1$ tels que

$$\mathfrak{F}(y) \equiv [f(y, x) + f_k(y, x) + f_{k+h}(y, x)] [g(y, x) + g_k(y, x) + g_{k+h}(y, x)] \quad \text{mod. } \Delta_{k+h+1}$$

et ainsi de suite.

La possibilité d'une telle décomposition suivant une droite Δ , d'indice aussi élevé que l'on veut, prise comme module, démontre évidemment la réductibilité de $\mathfrak{F}(y)$.

Entre Δ_0 et Δ_k ne se trouve aucun point de la différence $\mathfrak{F} - fg$; cette hypothèse entraîne avec elle la congruence

$$(5) \quad \mathfrak{F} - fg \equiv h_k \quad \text{mod. } \Delta_{k+1}$$

où h_k représente un polynôme entier en y et x qui n'est pas nul identiquement ; il est au plus de degré $(n-1)$ par rapport à y , et il se compose de l'ensemble des termes qui appartiennent à $\mathfrak{F} - fg$ et qui ont leurs points représentatifs sur Δ_k elle-même.

Si donc nous montrons qu'il existe deux polynômes entiers $f_k(y, x)$ et $g_k(y, x)$ de degrés, par rapport à y , au plus égaux à $m-1$ et $l-1$, tels que les deux congruences

$$(6) \quad h_k \equiv fg_k + gf_k \quad \text{mod. } \Delta_k + 1$$

et

$$(7) \quad 0 \equiv f_k g_k \quad \text{mod. } \Delta_k + 1$$

soient vérifiées, la congruence (4) sera par le fait même établie.

Faisons en conséquence dans les polynômes $f^{(1)}, f^{(2)}, \dots, f^{(5)}$ la substitution

$$(8) \quad y = x\xi^p \quad x = \xi^q \quad (p = p_3 \quad q = q_3),$$

ce qui les transforme respectivement en

$$\xi^{\alpha_1 q} F^{(1)}(x, \xi), \quad \xi^{\alpha_2 q} F^{(2)}(x, \xi), \quad \xi^{\beta p} F^{(3)}(x), \quad \xi^{\beta_1 p} F^{(4)}(x, \xi), \quad \xi^{\beta_3 p} F^{(5)}(x, \xi)$$

où

$$F^{(i)}(x, \xi) = x^{\beta_i} \xi^{\lambda_i(pq_i - p_i q)} + \dots + \frac{a_k^{(i)}}{a_{\lambda_i-1}^{(i-1)}} x^{(\lambda_i - k)q_i} \xi^{(\lambda_i - k)(pq_i - p_i q)} + \dots + \frac{a_{\lambda_i}^{(i)}}{a_{\lambda_i-1}^{(i-1)}},$$

($i = 1, 2$)

$$F^{(3)}(x) = x^{\beta} + \dots + \frac{a_k^{(3)}}{a_{\lambda_2}^{(2)}} x^{(\lambda_3 - k)q} + \dots + \frac{a_{\lambda_3}^{(3)}}{a_{\lambda_2}^{(2)}},$$

$$F^{(j)}(x, \xi) = x^{\beta_j} + \dots + \frac{a_k^{(j)}}{a_{\lambda_j-1}^{(j-1)}} x^{(\lambda_j - k)q_j} \xi^{k(p_j q - p q_j)} + \dots + \frac{a_{\lambda_j}^{(j)}}{a_{\lambda_j-1}^{(j-1)}} \xi^{\lambda_j(p_j q - p q_j)}.$$

($j = 4, 5$)

Dans les polynômes entiers $F^{(1)}, F^{(2)}, \dots, F^{(5)}$, les exposants des ξ sont tous positifs en vertu des inégalités (2).

Posant maintenant

$$F^{(1)} F^{(2)} F^{(4)} F^{(5)} = G, \quad F^{(3)} = F,$$

nous voyons que (8) transforme $g(y, x)$ en

$$\xi^{(\alpha_1 + \alpha_2)q + (\beta_1 + \beta_3)p} G$$

et $f(y, x)$ en $\xi^{\beta p} F$.

Le résultant de F et G est égal au produit des résultants de F et $F^{(i)}$ ($i = 1, 2, 4, 5$) et devient, par application des lemmes développés dans 2 une fonction $R(\xi^q)$ de ξ^q , dans

laquelle se trouve certainement un terme constant différent de zéro. Il existe alors, en vertu de 1, deux autres polynômes entiers en z et ξ , $G'(z, \xi)$ et $F'(z, \xi)$, tels que

$$(9) \quad FG' + GF' = R(\xi^q).$$

D'autre part, à cause de (4) du § 2. 4, le polynôme $h_k(y, x)$ ayant ses points représentatifs situés sur Δ_k se transforme par la substitution (8) en

$$\xi(\alpha_1 + \alpha_2)q + (\beta_5 + \beta_4 + \beta)p + h_k H_k(z) \quad (\beta = \beta_3),$$

où $H_k(z)$ représente un polynôme entier en z dont le degré est au plus égal à $n - 1$.

Si nous multiplions les deux membres de (9) par H_k , nous obtenons

$$F(H_k G') + G(H_k F') = H_k R(\xi^q)$$

ou encore

$$F(H_k G' + XG) + G(H_k F' - XF) = H_k R(\xi^q),$$

en désignant par X un polynôme entier quelconque en z et ξ .

Mais le coefficient de $z^\beta = z^m$ dans F est une constante, de sorte que l'on peut, sans introduction de puissances négatives de ξ , choisir X de telle manière que $H_k F' - XF$ soit, par rapport à z , de degré au plus égal à $m - 1$. Par cela même, celui de $H_k G' + XG$ devient au plus égal à $l - 1$, et nous avons ainsi démontré l'existence de deux polynômes entiers $F_k(z, \xi)$ et $G_k(z, \xi)$ de degrés, par rapport à z , au plus égaux respectivement à $m - 1$ et $l - 1$, et tels que

$$FG_k + GF_k = H_k R(\xi^q).$$

Ceux-ci, à cause de leur degré, sont d'ailleurs déterminés d'une manière unique.

De cette égalité nous déduisons :

$$(10) \quad (\xi^{\beta p} F) (\xi(\alpha_1 + \alpha_2)q + (\beta_4 + \beta_5)p + h G_k) + (\xi(\alpha_1 + \alpha_2)q + (\beta_4 + \beta_5)p G) (\xi^{\beta p} + h F_k) \\ = \xi(\alpha_1 + \alpha_2)q + (\beta + \beta_4 + \beta_5)p + h H_k R(\xi^q),$$

relation dans laquelle on peut, sans introduction de puissances négatives de ξ , remplacer $z\xi^p$ par y . Nous obtenons ainsi :

$$(11) \quad f(y, \xi^q)g_k(y, \xi) + g(y, \xi^q)f_k(y, \xi) = h_k(y, \xi^q)R(\xi^q),$$

où $f(y, \xi^q)$, $g(y, \xi^q)$ et $h_k(y, \xi^q)$ sont ce que deviennent $f(y, x)$, $g(y, x)$ et $h_k(y, x)$ après la substitution $x = \xi^q$.

Nous allons faire voir que $g_k(y, \xi)$ et $f_k(y, \xi)$ sont également des polynômes entiers en y et ξ^q .

Pour cela nous substituons à ξ dans (11) la quantité $\omega\xi$ où ω est une racine $q^{\text{ième}}$ primitive de l'unité. Ceci nous donne :

$$f(y, \xi^q)g_k(y, \omega\xi) + g(y, \xi^q)f_k(y, \omega\xi) = h_k(y, \xi^q)R(\xi^q).$$

On a donc :

$$f(y, \xi^q)[g_k(y, \xi) - g_k(y, \omega\xi)] + g(y, \xi^q)[f_k(y, \xi) - f_k(y, \omega\xi)] = 0,$$

et par conséquent, du fait que $f(y, \xi^q)$ et $g(y, \xi^q)$ n'ont aucun diviseur commun,

$$g_k(y, \xi) - g_k(y, \omega\xi) = 0,$$

$$f_k(y, \xi) - f_k(y, \omega\xi) = 0.$$

Par suite, sans introduction d'aucune irrationnelle, x se substitue à ξ^q dans (11) et l'on arrive à

$$(12) \quad f(y, x)g_k(y, x) + g(y, x)f_k(y, x) = h_k(y, x)R(x).$$

Mais $R(x)$ renferme un terme constant a différent de zéro, de sorte que nous avons encore :

$$f(y, x) \frac{1}{a} g_k(y, x) + g(y, x) \frac{1}{a} f_k(y, x) = h_k(y, x) [1 + p(x)],$$

$p(x)$ étant un polynôme en x , nul pour $x = 0$. Nous changeons de notation en écrivant g_k et f_k au lieu de $\frac{1}{a} g_k$ et $\frac{1}{a} f_k$ et c'est ainsi que, sous une autre forme, nous obtenons la congruence (6) que nous avons à établir.

La congruence (7) se trouve de même vérifiée par le produit $f_k g_k$, puisque celui-ci, par la substitution (8), se transforme en

$$\frac{1}{a^2} \xi^{(\alpha_1 + \alpha_2)q + (\beta_4 + \beta_5)p + \beta p + 2k} F_k(x, \xi) G_k(x, \xi).$$

Soit maintenant

$$(13) \quad k < i < \lambda < \dots < \mu$$

et supposons que successivement l'on ait trouvé des polynômes en y et x de degrés, par rapport à y , au plus égaux respectivement à $m - 1$ et $l - 1$: $f_i, f_\lambda; \dots, f_\mu, g_i, g_\lambda, \dots, g_\mu$, tels que l'on ait

$$(14) \quad \mathcal{F} \equiv (f + f_k + f_i + \dots + f_\mu)(g + g_k + g_i + \dots + g_\mu) \pmod{\Delta_{\mu+1}}.$$

Ceux-ci, déterminés d'ailleurs d'une manière unique, vérifient deux à deux des congruences telles que

$$(15) \quad fg_i + gf_i \equiv h_i \pmod{\Delta_{i+1}}.$$

Soit en outre $\nu > \mu$ et supposons que ν soit tel que l'on ait

$$(16) \quad \mathfrak{F} = (f + f_k + f_i + \dots + f_\mu)(g + g_k + g_i + \dots + g_\mu) \equiv h_\nu \pmod{\Delta_{\nu+1}},$$

où h_ν , comme du reste h_i dans (15), est un polynôme en y et x , non identiquement nul, de degré par rapport à y au plus égal à $n - 1$. On aura deux nouveaux polynômes f_ν et g_ν de degrés, par rapport à y , au plus égaux respectivement à $m - 1$ et $l - 1$, vérifiant la congruence

$$(17) \quad fg_\nu + gf_\nu = h_\nu \pmod{\Delta_{\nu+1}}.$$

A cause, d'autre part, de la manière même dont on détermine, d'après (15) et (17), les polynômes f_λ et g_ρ , l'on voit que les points représentatifs du produit de deux quelconques d'entre eux, $f_\lambda g_\rho$ par exemple, sont situés sur la droite $\Delta_{\lambda+\rho}$ ou au-dessus. De l'égalité

$$\begin{aligned} & (f + f_k + f_i + \dots + f_\mu + f_\nu)(g + g_k + g_i + \dots + g_\mu + g_\nu) \\ = & (f + f_k + \dots + f_\mu)(g + g_k + \dots + g_\mu) + fg_\nu + gf_\nu + f_\nu(g_k + g_i + \dots + g_\mu) \\ & + g_\nu(f_k + f_i + \dots + f_\mu) + f_\nu g_\nu \end{aligned}$$

jointe aux congruences (16) et (17) résulte alors

$$\mathfrak{F} \equiv (f + f_k + \dots + f_\mu + f_\nu)(g + g_k + \dots + g_\mu + g_\nu) \pmod{\Delta_{\nu+1}}.$$

Ce qui suffit pour l'établissement complet de la proposition énoncée.

4. — Désignant les deux diviseurs ainsi obtenus par $\mathfrak{F}^{(3)}(y)$ et $\mathfrak{G}_3(y)$, nous avons :

$$\begin{aligned} \mathfrak{F}^{(3)}(y) &= f(y, x) + f_k(y, x) + f_i(y, x) + \dots \\ \mathfrak{G}_3(y) &= g(y, x) + g_k(y, x) + g_i(y, x) + \dots \end{aligned}$$

et pouvons écrire :

$$\mathfrak{F}(y) = \mathfrak{F}^{(3)}(y) \mathfrak{G}_3(y) \quad [x]$$

De la même façon, l'on parviendrait à trouver les diviseurs $\mathfrak{F}^{(1)}(y)$, $\mathfrak{F}^{(2)}(y)$, $\mathfrak{F}^{(4)}(y)$, $\mathfrak{F}^{(5)}(y)$ qui correspondent aux autres côtés du contour. Toutefois, comme ces derniers n'ont ni entre eux, ni avec $\mathfrak{F}^{(3)}(y)$ de diviseur commun (§ 2. 7), l'on a nécessairement

$$\mathfrak{G}_3(y) = \mathfrak{F}^{(1)}(y) \mathfrak{F}^{(2)}(y) \mathfrak{F}^{(4)}(y) \mathfrak{F}^{(5)}(y) \quad [x]$$

de sorte que l'on pourra partir de $\mathfrak{G}_3(y)$ pour leur détermination.

5. — Par la substitution (8), $\mathcal{F}^{(3)}(y)$ se transforme et devient

$$\xi^{\beta p} [F(z) + \xi^k F_k(z, \xi) + \xi^i F_i(z, \xi) + \dots]$$

où $F_k(z, \xi)$, $F_i(z, \xi)$, ... , sont certains polynômes entiers en z et ξ .

Le contour relatif à $\mathcal{F}^{(3)}(y)$, dans le diagramme qui lui correspond, est en conséquence une certaine droite D, au-dessus de laquelle se trouvent tous les points représentatifs des polynômes $f_k(y, x)$, $f_i(y, x)$ On a donc

$$\mathcal{F}^{(3)}(y) = f(y, x) + \sum A_{\alpha\beta} x^\alpha y^\beta$$

où, relativement à D, $\sum$ a même signification que dans la formule du § 2. 8.

6. — Le point important de 3 réside dans le fait que, dans (9), le résultant R (ξ^q) des deux polynômes désignés par F et G contient un terme constant différent de zéro, et dépend en outre de ξ^q . Dans le cas où le contour relatif à $\mathcal{F}(y)$ est rectiligne, on a [(7) du § 2. 9]

$$\mathcal{F}(y) = (y^q + a_1 x^p)^{r_1} (y^q + a_2 x^p)^{r_2} \dots (y^q + a_i x^p)^{r_i} + \sum A_{\alpha\beta} x^\alpha y^\beta$$

de sorte que, si deux au moins des facteurs $(y^q + a_i x^p)^{r_i}$ sont distincts, l'on pourra poser, comme dans 3

$$\begin{aligned} (y^q + a_1 x^p)^{r_1} &= f(y, x) \\ (y^q + a_2 x^p)^{r_2} \dots (y^q + a_i x^p)^{r_i} &= g(y, x). \end{aligned}$$

La substitution $y = z \xi^p$, $x = \xi^q$ permet d'en déduire une décomposition en facteurs :

$$\mathcal{F}(y) = \mathcal{F}(y) \mathcal{G}(y). \quad [x]$$

Dans celle-ci, les f_k et g_k ayant même signification que dans 3, l'on aura

$$\begin{aligned} \mathcal{F}(y) &= (y^q + a_1 x^p)^{r_1} + f_k(y, x) + f_i(y, x) + \dots \\ \mathcal{G}(y) &= g(y, x) + g_k(y, x) + g_i(y, x) + \dots \end{aligned}$$

La méthode donnée dans 3 s'applique encore dans le cas où le contour se confond avec l'axe des abscisses. L'on peut alors écrire [(9) du § 2. 10]

$$\mathcal{F}(y) = (y + a_1)^{r_1} \dots (y + a_i)^{r_i} + \sum A_{\alpha\beta} x^\alpha y^\beta,$$

expression dans laquelle le signe $\sum$ ne s'étend qu'à des termes où α n'est pas nul.

$\mathcal{P}(y)$, dans ce cas, pourra toujours se décomposer en facteurs, lorsque ses termes indépendants de x ne se réduiront pas à une simple puissance de $(y + a_1)$.

7. — Nous faisons ici la même observation que dans 5. Le diviseur

$$\mathcal{P}(y) = (y^q + a_1 x^p)^{r_1} + f_k(y, x) + f_i(y, x) + \dots$$

a son contour rectiligne déterminé par les points représentatifs de $(y^q + a_1 x^p)^{r_1}$, tandis que $f_k(y, x)$, $f_i(y, x)$, ... ont leurs points représentatifs situés au-dessus de celui-ci.

8. — Le procédé indiqué dans 6 ne s'appliquant plus si les polynômes en y considérés sont de l'une ou l'autre des deux formes

$$\mathcal{P}_1(y) = (y^q + ax^p)^r + \sum A_{\alpha\beta} x^\alpha y^\beta$$

ou

$$\mathcal{P}_2(y) = (y + a)^r + \sum A_{\alpha\beta} x^\alpha y^\beta$$

nous en concluons que, dans tout polynôme en y irréductible, les termes indépendants de x forment un polynôme entier en y à coefficients constants, puissance entière d'une expression linéaire en y .

Cette remarque s'étend immédiatement au cas où $\mathcal{P}(y)$ serait puissance d'un polynôme irréductible.

9. — Comme conséquence enfin de ce qui précède, nous avons la proposition :

Le polynôme

$$\mathcal{P}(y) = y^n + A_1 y^{n-1} + \dots + A_i y^{n-i} + \dots + A_n$$

étant irréductible, ou puissance d'un polynôme irréductible, l'on a toujours

$$(18) \quad \frac{\rho_n}{n} \leq \frac{\rho_i}{i},$$

$$i = 1, 2, \dots (n-1)$$

$\rho_1, \rho_2, \dots, \rho_n$ représentent les premiers exposants dans les coefficients

$$A_i = a_{\rho_i} x^{\rho_i} + a_{\rho_i+1} x^{\rho_i+1} + \dots$$

qui ici peuvent être tous ou en partie seulement à caractère entier.

Dans le premier cas, la proposition est immédiate. On le voit en considérant la droite à laquelle se réduit le contour qui correspond à $\mathcal{P}(y)$.

Dans le second, celui où certains des ρ_i sont négatifs, une substitution de la forme

$y = \frac{z}{x^k}$ où k désigne un certain entier, suivie d'une multiplication de $\mathfrak{F}\left(\frac{z}{x^k}\right)$ par x^{nk} transformera $\mathfrak{F}(y)$ en un polynôme

$$\mathfrak{F}'(z) = z^n + A'_1 z^{n-1} + \dots + A'_i z^{n-i} + \dots + A'_n$$

dont tous les coefficients seront à caractère entier. Le premier exposant de A'_i ($i = 1, 2, \dots, n$) étant alors $\rho_i + ik$, l'on aura

$$\frac{\rho_n + nk}{n} \leq \frac{\rho_i + ik}{i}$$

et par suite, ici aussi, les inégalités (18) que nous voulions établir.

§ 4. — Equivalences et ensemble E.

1. — Soit

$$y_0 = b_1 x^{\varepsilon_1} + b_2 x^{\varepsilon_2} + \dots + b_i x^{\varepsilon_i} + \dots$$

une série quelconque ordonnée suivant des puissances entières ou fractionnaires de x , où

$$\varepsilon_1 < \varepsilon_2 < \varepsilon_3 < \dots < \varepsilon_i < \dots$$

et dans laquelle les termes à exposants négatifs sont en nombre fini. Soit en outre $\mathfrak{Q}(y)$ un polynôme quelconque en y .

Si, dans $\mathfrak{Q}(y)$, on substitue à y la série y_0 et que l'on effectue les calculs en ayant soin d'ordonner les termes ainsi obtenus suivant les puissances croissantes de x , on obtient une série que nous désignerons par $\mathfrak{Q}(y_0)$.

Etant donnés deux polynômes en y , $\mathfrak{Q}(y)$ et $\mathfrak{R}(y)$, nous disons que les séries qui leur correspondent $\mathfrak{Q}(y_0)$ et $\mathfrak{R}(y_0)$ sont *équivalentes*, ce qui s'écrira

$$(1) \quad \mathfrak{Q}(y_0) \sim \mathfrak{R}(y_0)$$

si dans chacune d'elles, si loin que l'on poursuive la comparaison en commençant par les termes dont les exposants sont les plus petits, les coefficients des mêmes puissances de x sont identiques.

On voit tout d'abord immédiatement que (1) ayant lieu, on a également

$$\mathfrak{Q}(y_0) - \mathfrak{R}(y_0) \sim 0$$

et que les deux équivalences

$$\mathfrak{Q}(y_0) \sim \mathfrak{S}(y_0), \quad \mathfrak{R}(y_0) \sim \mathfrak{S}(y_0)$$

entraînent la suivante

$$\mathfrak{Q}(y_0) \sim \mathfrak{R}(y_0).$$

Si l'on additionne, soustrait ou multiplie membre à membre deux ou plusieurs équivalences, on en obtient de nouvelles. Si enfin, au sens défini dans le § 1. 2, on a

$$\mathfrak{Q}(y) = \mathfrak{R}(y) \quad [x]$$

il s'en suivra

$$\mathfrak{Q}(y_0) \simeq \mathfrak{R}(y_0).$$

$\mathfrak{Q}(y)$ étant toujours un polynôme quelconque en y , nous disons que y_0 est *racine* de l'équivalence

$$(2) \quad \mathfrak{Q}(y) \simeq 0$$

ou plus brièvement *racine* de $\mathfrak{Q}(y)$, si, y_0 étant mis à la place de y dans cette dernière relation, l'expression $\mathfrak{Q}(y_0)$ que l'on obtient ainsi est équivalente à zéro. Une équivalence telle que (2) sera dite *irréductible*, si son premier membre est irréductible.

Dans la suite, nous utiliserons, en les appliquant aux équivalences telles que (2), les locutions que l'on emploie lorsqu'il s'agit de quantités racines d'équations données.

2. — Une même série y_0 ne peut être racine de deux polynômes irréductibles distincts. — $\mathfrak{Q}(y)$ et $\mathfrak{R}(y)$ étant irréductibles, il existe en effet deux autres polynômes $\mathfrak{Q}_1(y)$ et $\mathfrak{R}_1(y)$ [(6) du § 1. 4] tels que

$$\mathfrak{Q}(y)\mathfrak{Q}_1(y) + \mathfrak{R}(y)\mathfrak{R}_1(y) = 1 \quad [x]$$

ce qui entraîne

$$\mathfrak{Q}(y_0)\mathfrak{Q}_1(y_0) + \mathfrak{R}(y_0)\mathfrak{R}_1(y_0) \simeq 1.$$

Si donc on avait

$$\mathfrak{Q}(y_0) \simeq 0, \quad \mathfrak{R}(y_0) \simeq 0,$$

on aurait aussi, $\mathfrak{Q}_1(y_0)$ et $\mathfrak{R}_1(y_0)$ ne contenant jamais qu'un nombre fini de puissances négatives de x :

$$\mathfrak{Q}(y_0)\mathfrak{Q}_1(y_0) \simeq 0$$

$$\mathfrak{R}(y_0)\mathfrak{R}_1(y_0) \simeq 0$$

et par conséquent

$$0 \simeq 1,$$

ce qui est contradictoire.

De la même façon, l'on verrait que y_0 ne peut être simultanément racine de deux polynômes, dont l'un, irréductible, ne serait pas diviseur de l'autre.

Donc, pour qu'un polynôme $\mathfrak{R}(y)$ admette en même temps qu'un autre polynôme irréductible $\mathfrak{Q}(y)$ la racine y_0 , il faut et il suffit que $\mathfrak{R}(y)$ soit divisible par $\mathfrak{Q}(y)$.

3 (1). — Soit maintenant

$$\mathfrak{F}(y) = y^n + \dots + A_i y^{n-i} + \dots + A_n$$

(1) Cf. pour la fin de ce paragraphe et le commencement du suivant, dans le 92^e volume du *Journal de Crelle*, les premières pages du Mémoire de MM. Dedekind et Weber, intitulé : « *Theorie der algebraischen Functionen einer Veränderlichen* ».

un polynôme en y , de degré n , irréductible, dont les coefficients

$$A_i = a_{\rho_i} x^{\rho_i} + a_{\rho_i+1} x^{\rho_i+1} + \dots$$

($i = 1, 2, \dots, n$)

sont à caractère entier ou rationnel.

Nous posons

$$(3) \quad \mathcal{F}(y) \simeq 0$$

et nous admettons que cette équivalence est vérifiée par l'expression y_0 écrite au début de l'alinéa 1. On peut, en partant de cette seule hypothèse, déterminer la forme exacte de y_0 et c'est la solution de ce problème qui fera l'objet de la fin de notre première partie.

Nous introduisons pour cela l'ensemble E des expressions que l'on obtient en remplaçant y par y_0 dans n'importe quel polynôme en y , dont les coefficients sont des séries ordonnées suivant les puissances entières de x . Ces expressions seront désignées par α , β , ... ou $\alpha(y_0)$, $\beta(y_0)$, ... et seront appelées fonctions de E. Par $\alpha(y)$, $\beta(y)$, ... nous représenterons toujours les polynômes en y dont α et β sont issues.

Si α et β appartiennent à E, il en est de même de $\alpha \pm \beta$, $\alpha\beta$. Mais, pour le moment tout au moins, nous excluons la division de deux de ces quantités entre elles, et c'est pour cela que nous ne donnons pas à E le nom de corps.

4. — Trois fonctions α , β , γ de E étant données, si l'on a

$$(4) \quad \beta \simeq \gamma$$

l'on a aussi

$$(5) \quad \alpha\beta \simeq \alpha\gamma.$$

La réciproque est vraie : si (5) a lieu sans que α soit équivalent à zéro, (4) aura lieu également.

En effet, $\alpha(y_0)$ n'étant pas équivalent à zéro, $\alpha(y)$ n'est pas divisible par $\mathcal{F}(y)$ et il existe deux polynômes $\alpha'(y)$ et $\mathcal{F}_1(y)$ tels que (§ 1. 4).

$$\alpha(y) \alpha'(y) + \mathcal{F}(y) \mathcal{F}_1(y) = 1 \quad [x]$$

tels par conséquent que

$$\alpha(y_0) \alpha'(y_0) \simeq 1.$$

Nous pourrions donc supprimer dans les deux membres d'une équivalence un même facteur non équivalent à zéro.

5. — Soit $\alpha(y)$ un polynôme en y de degré quelconque m . Si $m \geq n$, on peut diviser $\alpha(y)$ par $\mathbb{F}(y)$ (§ 1. 4) et obtenir une relation de la forme

$$\alpha(y) = h(y) \mathcal{F}(y) + \beta(y) \quad [x]$$

dans laquelle $\beta(y)$ est en y un polynôme de degré au plus égal à $n - 1$.

On a par conséquent

$$x(y_0) \simeq \beta(y_0),$$

d'où la proposition :

Toute fonction α de l'ensemble E est équivalente à une expression unique de la forme

$$(6) \quad A_0 + A_1 y_0 + \dots + A_{n-1} y_0^{n-1}$$

où les $A_0, \dots, A_{n-1}$ sont des séries à caractère rationnel. Réciproquement, toute expression telle que (6) appartient aussi à E.

6. — Si le déterminant

$$D = \left| A_i^{(k)} \right|$$

des n fonctions de E :

$$\left. \begin{aligned} r_1 &= A_0^{(1)} + A_1^{(1)} y_0 + \dots + A_{n-1}^{(1)} y_0^{n-1} \\ r_2 &= A_0^{(2)} + A_1^{(2)} y_0 + \dots + A_{n-1}^{(2)} y_0^{n-1} \\ &\vdots \\ r_n &= A_0^{(n)} + A_1^{(n)} y_0 + \dots + A_{n-1}^{(n)} y_0^{n-1} \end{aligned} \right\}$$

n'est pas équivalent à zéro, toute fonction de E sera équivalente à une expression de la forme

$$A_1\eta_1 + A_2\eta_2 + \dots + A_n\eta_n$$

dans laquelle les $A_1, A_2, \dots, A_n$ sont des séries à caractère rationnel.

On dit dans ce cas que $\eta_1, \eta_2, \dots, \eta_n$ constituent une *base* de E.

Le déterminant D, tous calculs effectués, est une série ordonnée suivant les puissances croissantes de ω . En disant qu'il n'est pas équivalent à zéro, nous entendons par là qu'il existe un nombre fini k tel que ω^k multiplié par une constante non nulle, soit le premier terme du développement en série de D.

où les A_{ik} sont des séries rationnelles en x . On en déduit l'équivalence

$$(9) \quad \begin{vmatrix} A_{11} - y & A_{12} & \dots & A_{1n} \\ A_{21} & A_{22} - y & \dots & A_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ A_{n1} & A_{n2} & \dots & A_{nn} - y \end{vmatrix} \approx 0$$

vérifiée par ζ , et que nous écrivons

$$(10) \quad \varphi(y) = y^n + B_1 y^{n-1} + \dots + B_n \approx 0.$$

Ce polynôme en y , $\varphi(y)$, dans lequel le coefficient de y^n est égal à l'unité, est indépendant de la base $\eta_1, \eta_2, \dots, \eta_n$.

A l'expression

$$(-1)^n B_n = \begin{vmatrix} A_{11} & A_{12} & \dots & A_{1n} \\ A_{21} & A_{22} & \dots & A_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ A_{n1} & A_{n2} & \dots & A_{nn} \end{vmatrix}$$

que l'on désigne par la notation $\mathfrak{N}(\zeta)$, l'on donne le nom de *norme* de ζ .

On voit que

$$(11) \quad \varphi(t) = \mathfrak{N}(t - \zeta) = (-1)^n \mathfrak{N}(\zeta - t)$$

dans le cas où t est, soit une constante, soit une série rationnelle en x .

9. — ζ étant fonction de l'ensemble E , l'équivalence à laquelle satisfait ζ a son premier membre soit irréductible, soit puissance d'un polynôme irréductible ⁽¹⁾.

Soit

$$(12) \quad \varphi_1(y) = y^e + B'_1 y^{e-1} + \dots + B'_{e-1} y + B'_e \approx 0$$

l'équivalence de degré *minimum* vérifiée par ζ . Les coefficients B'_i sont ici des séries rationnelles en x ; $\varphi_1(y)$ est irréductible et nous avons par hypothèse $e < n$; ζ satisfait aussi à une équivalence telle que (10)

$$\varphi(y) \approx 0$$

et $\varphi(y)$ est divisible par $\varphi_1(y)$ (§ 4.2).

⁽¹⁾ Cf. DEDEKIND et WEBER, *Loc. cit.* p. 188.

De même qu'à y_0 nous avons fait correspondre l'ensemble E, de même ici nous pouvons faire correspondre à ζ un ensemble E' dont toutes les fonctions seront de la forme :

$$A'_0 + A'_1 \zeta + \dots + A'_{e-1} \zeta^{e-1},$$

où les coefficients $A'_0, A'_1, \dots, A'_{e-1}$ seront des séries rationnelles en x .

Ceci dit, soit

$$(13) \quad y^f + \eta_1 y^{f-1} + \dots + \eta_{f-1} y + \eta_f \approx 0$$

l'équivalence de degré *minimum* vérifiée par y_0 dans le cas de coefficients $\eta_1, \dots, \eta_f$ appartenant à E'. Nous pouvons, dans le premier membre de celle-ci, à cause de l'irréductibilité de $\varphi_1(y)$, supposer 4. le coefficient de y^f égal à l'unité.

y_0^f et par conséquent toute fonction de E sera équivalente à une expression telle que

$$(14) \quad C'_0 + C'_1 y_0 + \dots + C'_{f-1} y_0^{f-1},$$

dans laquelle les $C'_0, C'_1, \dots, C'_{f-1}$ sont fonctions de E'.

Or (14) n'est autre chose qu'une fonction linéaire des ef expressions

$$(15) \quad \begin{aligned} & y_0^k \zeta^h \\ & k = 0, 1, \dots, (f-1) \\ & h = 0, 1, \dots, (e-1) \end{aligned}$$

dans laquelle les coefficients sont des séries rationnelles en x .

Toute relation de la forme

$$\sum A_{kh} y_0^k \zeta^h \approx 0 \quad \left(\begin{array}{l} 0 \leq k \leq f-1 \\ 0 \leq h \leq e-1 \end{array} \right)$$

dans laquelle les A_{kh} seraient des séries rationnelles en x non équivalentes à zéro, est d'autre part nécessairement exclue à cause de (13), dont le degré est minimum. Les ef expressions (14) constituent donc 7. une base de E et l'on a par conséquent

$$ef = n.$$

Nous utilisons maintenant la base (15) et déterminons $\mathfrak{T}(\zeta)$.

On voit que l'on a

$$(16) \quad \mathfrak{N}(\zeta) = [(-1)^e B'_e]^f = (-1)^n B'_e f.$$

Il suffit maintenant de considérer la fonction $\zeta - t$ ($t =$ constante arbitraire). Celle-ci satisfait à une équivalence de degré minimum que l'on déduit de (12). La formule (16) appliquée à la fonction $(\zeta - t)$, en tenant compte de (11), donne alors la démonstration du théorème énoncé.

10. — On voit facilement que zéro est la seule fonction de E dont la norme soit équivalente à zéro et que la norme d'une série rationnelle en x est équivalente à la $n^{\text{ième}}$ puissance de celle-ci. On voit aussi que les normes $\mathfrak{N}(\zeta)$ et $\mathfrak{N}(\zeta')$ de deux fonctions quelconques de E vérifient l'équivalence

$$(17) \quad \mathfrak{N}(\zeta\zeta') \sim \mathfrak{N}(\zeta) \mathfrak{N}(\zeta').$$

§ 5. — Fonctions entières de E.

1. — Par analogie avec les fonctions algébriques entières, nous dirons qu'une fonction ω de l'ensemble E est *entière*, lorsqu'elle satisfait à une équivalence de la forme :

$$(1) \quad y^e + B_1 y^{e-1} + \dots + B_e \sim 0$$

dans laquelle les coefficients $B_1, B_2, \dots, B_e$ sont des séries rationnelles à caractère entier.

D'après cette définition, les séries rationnelles qui, elles aussi, appartiennent à E, ne seront entières que si elles sont à caractère entier.

2. — La somme, la différence et le produit de deux fonctions entières de E sont de nouveau fonctions entières de E.

La démonstration est ici la même que celle que l'on donne dans le cas de fonctions algébriques entières.

α et β étant deux fonctions entières de E qui satisfont aux équivalences respectives

$$(2) \quad \begin{cases} x^k + A_1 x^{k-1} + \dots + A_{k-1} x + A_k \sim 0 \\ \beta^l + B_1 \beta^{l-1} + \dots + B_{l-1} \beta + B_l \sim 0 \end{cases}$$

nous représentons par ω l'une ou l'autre des expressions

$$\alpha + \beta, \quad \alpha - \beta \quad \text{ou} \quad \alpha\beta.$$

Puis nous posons $kl = m$ et désignons les m quantités

$$\begin{aligned} & \alpha^r \beta^s \\ r = 0, 1, & \dots (k-1) \\ s = 0, 1, & \dots (l-1) \end{aligned}$$

dans un ordre quelconque par $\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_m$.

A cause de (2) les produits $\omega\omega_1, \omega\omega_2, \dots, \omega\omega_m$ peuvent s'écrire

$$\omega\omega_r \sim c_{r,1} \omega_1 + c_{r,2} \omega_2 + \dots + c_{r,m} \omega_m, \\ (r = 1, 2, \dots, m)$$

où les $c_{r,i}$ sont des séries rationnelles à caractère entier. L'élimination de $\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_m$ conduit alors à l'équivalence

$$\begin{vmatrix} c_{11} - \omega & c_{12} & \dots & c_{1m} \\ c_{21} & c_{22} - \omega & \dots & c_{2m} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ c_{m1} & c_{m2} & \dots & c_{mm} - \omega \end{vmatrix} \sim 0$$

dans le premier membre de laquelle les coefficients sont des séries rationnelles entières.

3. — Si ζ est une fonction de E et si

$$\varphi(y) = y^n + B_1 y^{n-1} + \dots + B_n \sim 0$$

est l'équivalence de degré n , à laquelle satisfait ζ , le polynôme $\varphi(y)$ est ou irréductible, ou puissance d'un polynôme irréductible.

Or, la norme de ζ

$$\mathfrak{N}(\zeta) = (-1)^n B_n$$

n'est entière que si les coefficients

$$B_i = \alpha_{\rho_i} x^{\rho_i} + \alpha_{\rho_i+1} x^{\rho_i+1} + \dots$$

sont tels que l'on ait

$$\begin{aligned} \rho_i & \geq 0. \\ (i = 1, 2, \dots, n) \end{aligned}$$

Ce sera toujours le cas, en vertu des inégalités [(18) du § 3. 9], lorsque

$$\rho_n \geq 0.$$

Nous aboutissons donc à la proposition fondamentale :

La condition nécessaire et suffisante pour qu'une fonction de E soit entière est que sa norme soit à caractère entier.

En désignant, ainsi que cela se fera dans la suite, l'exposant ε_n , entrant dans B_n , sous le nom d'ordre de $\mathfrak{N}(\zeta)$, nous pouvons énoncer cette même proposition sous la forme :

Pour qu'une fonction de l'ensemble E soit entière, il faut et il suffit que l'ordre de sa norme soit positif ou nul.

4. — Étant données deux fonctions α et β de l'ensemble E , dont la seconde β n'est pas équivalente à zéro, il existe toujours dans E une et une seule fonction γ telle que

$$\beta\gamma \approx \alpha,$$

Si, en effet, nous considérons $\beta = \beta(y_0)$, $\alpha = \alpha(y_0)$, il existe, par extension de la formule (5) (§ 1. 4), puisque $\beta(y)$ n'est pas divisible par $\mathfrak{P}(y)$, deux polynômes $\gamma(y)$ et $\mathfrak{P}_1(y)$, $\gamma(y)$ de degré au plus égal à $n - 1$, tels que

$$(3) \quad \beta(y) \gamma(y) + \mathfrak{P}(y) \mathfrak{P}_1(y) = \alpha(y) \quad [x]$$

tels par conséquent que

$$\beta(y_0) \gamma(y_0) \approx \alpha(y_0).$$

La fonction $\gamma = \gamma(y_0)$ ainsi obtenue est d'ailleurs unique, car si l'on avait encore

$$\beta(y_0) \gamma'(y_0) \approx \alpha(y_0),$$

γ' étant en y_0 de degré au plus égal à $(n - 1)$, on aurait :

$$\beta(y_0) [\gamma(y_0) - \gamma'(y_0)] \approx 0,$$

c'est-à-dire (§ 4. 4)

$$\gamma(y_0) \approx \gamma'(y_0).$$

5. — Deux fonctions α et β de E étant données, nous appelons *quotient* de α par β la fonction γ de E telle que

$$(4) \quad \beta\gamma \approx \alpha.$$

Nous représenterons cette fonction γ par la notation $\frac{\alpha}{\beta}$.

A cause de (4) et de § 4. 10, nous avons

$$\mathfrak{N}(\beta) \mathfrak{N}(\gamma) \approx \mathfrak{N}(\alpha),$$

de sorte qu'en utilisant la définition donnée § 1. 4, nous pouvons écrire

$$\mathfrak{N}(\gamma) \approx \left(\frac{\mathfrak{N}(\alpha)}{\mathfrak{N}(\beta)} \right)$$

ou encore

$$\mathfrak{O}\left(\frac{\alpha}{\beta}\right) \sim \left(\frac{\mathfrak{O}(\alpha)}{\mathfrak{O}(\beta)}\right).$$

L'ordre de $\mathfrak{O}\left(\frac{\alpha}{\beta}\right)$ est égal à l'ordre de $\mathfrak{O}(\alpha)$ diminué de celui de $\mathfrak{O}(\beta)$.

6. — Une fonction quelconque α de l'ensemble E est dite *divisible* par une autre fonction β du même ensemble, si $\frac{\alpha}{\beta}$ est fonction entière de E.

Dans cette définition, comme dans la précédente, on suppose toujours que la fonction β n'est pas équivalente à zéro.

α étant divisible par β , et β par γ , α est à son tour divisible par γ .

Si en effet l'on a, ζ et η représentant des fonctions entières,

$$\beta\zeta \sim \alpha$$

$$\gamma\eta \sim \beta,$$

l'on a

$$\beta\gamma\zeta\eta \sim \alpha\beta$$

c'est-à-dire

$$\gamma\zeta\eta \sim \alpha,$$

où $\zeta\eta$ est également fonction entière.

Si l'on a α et β divisibles chacune par γ et que α_1 et β_1 soient deux fonctions entières de E, l'on aura toujours $\alpha\alpha_1 \pm \beta\beta_1$ divisible également par γ .

Des équivalences

$$\gamma\eta \sim \alpha$$

$$\gamma\zeta \sim \beta$$

on déduit en effet

$$\gamma(\alpha_1\eta + \beta_1\zeta) \sim \alpha\alpha_1 + \beta\beta_1,$$

ce qui démontre la proposition, puisque $\alpha_1\eta + \beta_1\zeta$ est une fonction entière, lorsqu'il en est de même de η et ζ .

Pour qu'une fonction α soit divisible par une fonction β , il faut et il suffit que l'ordre de $\mathfrak{O}(\alpha)$ soit égal ou supérieur à l'ordre de $\mathfrak{O}(\beta)$.

7. $\mathfrak{O}(\alpha)$ et $\mathfrak{O}(\beta)$ étant du même ordre k , il existe une et une seule constante a telle que $\mathfrak{O}(\alpha - a\beta)$ soit d'ordre supérieur à k .

Ayant

$$\alpha - a\beta \sim \left(\frac{\alpha}{\beta} - a\right)\beta$$

et par conséquent

$$\mathfrak{O}(\alpha - a\beta) \sim \mathfrak{O}\left(\frac{\alpha}{\beta} - a\right) \mathfrak{O}(\beta),$$

il suffit, pour démontrer cette proposition, de faire voir qu'on peut trouver une constante unique α , telle que l'ordre de $\mathfrak{N} \left(\frac{\alpha}{\beta} - \alpha \right)$ soit un nombre positif différent de zéro.

α et β étant de même ordre, la fonction $\frac{\alpha}{\beta} = \zeta$ aura sa norme d'ordre zéro et par suite (§ 3. 8) ζ satisfera à une équivalence

$$\mathfrak{Q}(y) \sim 0,$$

dont le premier membre, ordonné suivant les puissances croissantes de x , peut s'écrire

$$\mathfrak{Q}(y) = (y - \alpha)^n + x f_1(y) + x^2 f_2(y) + x^3 f_3(y) + \dots,$$

où $f_1(y)$, $f_2(y)$, ... sont des polynômes entiers en y de degré $n - 1$ au plus, à coefficients constants. Par la substitution $y - \alpha = x$, on passe alors à un polynôme en x :

$$\mathfrak{Q}_1(x) = x^n + x f_1(x + \alpha) + x^2 f_2(x + \alpha) + \dots$$

dont $\zeta - \alpha$ est racine. Or dans $\mathfrak{Q}_1(x)$ les termes indépendants de x dépendent tous de x .

$\mathfrak{N}(\zeta - \alpha)$ est donc d'un ordre au moins égal à l'unité et notre proposition se trouve, par ce fait même, entièrement démontrée.

§ 6. — Fonctions d'ordre minimum.

1. — k désignant l'ordre de $\mathfrak{N}(x)$, le nombre entier ou fractionnaire $\frac{k}{n}$ sera dit *ordre de α par rapport à x* .

Dans le cas où α se réduit à une série rationnelle en x

$$x = a_\rho x^\rho + a_{\rho+1} x^{\rho+1} + \dots,$$

comme l'ordre de $\mathfrak{N}(x)$ est $n\rho$, l'ordre de α par rapport à x sera le nombre ρ lui-même.

D'après ces définitions, l'ordre d'une fonction α de E est toujours un multiple de $\frac{1}{n}$, et par conséquent, dans l'ensemble des fonctions *entières* de E, il y en a certainement dont l'ordre, relativement à x , est minimum.

2. — L'ordre d'une fonction d'ordre minimum ne peut être que de la forme $\frac{1}{s}$.

La fraction $\frac{r}{s}$ étant supposée irréductible, on peut en effet toujours déterminer deux nombres entiers positifs r' et k tels que

$$r r' - 1 = ks.$$

Si donc une fonction α de E, d'ordre $\frac{n}{s}$, est donnée, la fonction de E

$$\frac{\alpha^{n'}}{x^k}$$

sera d'ordre $\frac{1}{s}$, puisque l'ordre de sa norme est égal à

$$r'n \frac{n}{s} - nk = n \frac{1}{s}.$$

Enfin, s sera soit égal à n , soit diviseur de n , puisque l'ordre est toujours multiple de $\frac{1}{n}$.

2. Pour qu'une fonction α soit divisible par une autre fonction β , il faut et il suffit que l'ordre de $\mathfrak{N}\left(\frac{\alpha}{\beta}\right)$ soit nul ou positif. Au cas et seulement dans le cas où cet ordre serait nul, nous disons que α est *divisible exactement* par β . L'ordre de $\mathfrak{N}(\alpha)$ est alors égal à celui de $\mathfrak{N}(\beta)$.

π désignant maintenant et une fois pour toutes l'une quelconque des fonctions d'ordre minimum dont l'existence est établie, nous avons la proposition :

Toute fonction α de l'ensemble E est divisible exactement par une puissance entière positive, nulle ou négative de π .

m étant l'ordre de $\mathfrak{N}(\alpha)$ et l'entier $l = \frac{n}{s}$ l'ordre de $\mathfrak{N}(\pi)$, l'on a effectivement m multiple exact de l .

Pour le voir, nous posons $m = rl + t$, où t désigne le plus petit reste positif de la division de m par l , et remarquons qu'ayant

$$\mathfrak{N}\left(\frac{\alpha}{\pi^r}\right) = \left(\frac{\mathfrak{N}(\alpha)}{[\mathfrak{N}(\pi)]^r}\right),$$

l'ordre de cette norme se réduit à

$$m - r \frac{n}{s} = m - rl = t.$$

Si donc t était différent de zéro, comme l'on a

$$\frac{t}{n} < \frac{l}{n} = \frac{1}{s},$$

la fonction $\frac{\alpha}{\pi^r}$ serait relativement à x d'ordre inférieur à π . Ce résultat étant contradictoire, on a forcément $t = 0$.

Celui-ci, par définition, signifie que

$$\begin{aligned} \alpha - a_{k,r} x^k \pi^r & \text{ est divisible par } x^k \pi^r + 1, \\ \alpha - (a_{k,r} x^k \pi^r + a_{k,r+1} x^k \pi^{r+1}) & \gg \gg \gg x^k \pi^{r+2}, \\ \text{etc.} \end{aligned}$$

Or, le second membre de (2) peut se mettre sous la forme d'un polynôme en π de degré $s - 1$, dont les coefficients sont des séries rationnelles en x . Nous aboutissons donc au résultat suivant :

α étant une fonction quelconque de E et π une fonction d'ordre minimum $\frac{1}{s}$ relatif à x , il existe toujours un polynôme en π , unique d'ailleurs,

$$b_0 + b_1 \pi + \dots + b_{s-1} \pi^{s-1}$$

de degré $s - 1$ au plus, dont les coefficients sont des séries rationnelles en x et tel que la différence

$$\alpha - (b_0 + b_1 \pi + \dots + b_{s-1} \pi^{s-1})$$

soit divisible par une puissance entière de x aussi élevée que l'on voudra.

6. — En appliquant ceci aux puissances de y_0 : $1, y_0, y_0^2, \dots, y_0^{n-1}$, nous aurons n différences, divisibles chacune par une puissance de x aussi élevée que l'on voudra :

$$\begin{aligned} y_0^i - (A_{0i} + A_{1i} \pi + \dots + A_{s-1,i} \pi^{s-1}) \\ (i = 0, 1, 2, \dots, (n-1)) \end{aligned}$$

dans lesquelles les A_{ik} sont séries rationnelles en x .

Si maintenant s est inférieur à n , il existera toujours n séries rationnelles $C_{n-1}, C_{n-2}, \dots, C_1, C_0$ telles que l'on ait :

$$\begin{aligned} B_k = C_{n-1} A_{k0} + C_{n-2} A_{k1} + C_{n-3} A_{k2} + \dots + C_0 A_{k, n-1} \approx 0, \\ [k = 0, 1, 2, \dots, (s-1)] \end{aligned}$$

telles par conséquent (§ 5. 6) que la différence

$$\begin{aligned} C_0 y_0^{n-1} + C_1 y_0^{n-2} + \dots + C_{n-2} y_0 + C_{n-1} - \sum_{k=0}^{s-1} B_k \pi^k \\ \approx C_0 y_0^{n-1} + C_1 y_0^{n-2} + \dots + C_{n-2} y_0 + C_{n-1} \end{aligned}$$

soit divisible par une puissance entière de x aussi élevée que l'on voudra.

Cela étant, la fonction

$$C_0 y_0^{n-1} + C_1 y_0^{n-2} + \dots + C_{n-1} = \eta$$

satisfait, puisqu'elle appartient à E, à une équivalence de la forme

$$y^n + A'_1 y^{n-1} + \dots + A'_n \sim 0,$$

dont le premier membre peut être ou irréductible, ou puissance d'un polynôme irréductible. L'ordre de la norme $(-1)^n A'_n$ de η est aussi élevé que l'on voudra, et par conséquent (§ 3. 9) l'on aura $\eta^n \sim 0$, c'est-à-dire

$$(C_0 y_0^{n-1} + \dots + C_{n-1})^n \sim 0$$

et par suite

$$C_0 y_0^{n-1} + \dots + C_{n-1} \sim 0.$$

Ceci est impossible, vu l'irréductibilité de l'équivalence de degré n [(3) du § 4. dont y_0 est racine.

L'hypothèse $s < n$ est donc inadmissible et l'on a nécessairement $s = n$. Par suite :

L'ordre relativement à x des fonctions d'ordre minimum dans E, est égal à $\frac{1}{n}$.

§ 7. — Forme nécessaire de y_0 .

1. — π étant d'ordre minimum, sa norme, à cause de la proposition précédente, sera nécessairement d'un ordre égal à l'unité. Ceci exclut pour π la possibilité d'être racine d'un polynôme réductible.

Soit

$$(1) \quad \mathcal{Q}(y) = y^n + B_1 y^{n-1} + \dots + B_n \sim 0$$

l'équivalence irréductible à la laquelle satisfait π . A celle-ci correspond un diagramme tel que celui représenté dans la figure 3. Soit $\mathcal{Q}'(y)$ le polynôme à coefficients, séries rationnelles en ξ , que l'on obtient en substituant, dans $\mathcal{Q}(y)$, ξ^n à x . Le diagramme relatif à $\mathcal{Q}'(y)$ est alors donné par la figure 4, dans laquelle, à part A' et B', aucun point représentatif ne se trouve sur A' B'. En effet, dans tous les coefficients $B_1, B_2, \dots, B_{n-1}$ de $\mathcal{Q}(y)$, le premier terme est, ainsi que l'indique la figure 3, au moins du premier degré par rapport à x .

On peut en conséquence écrire

$$\mathcal{Q}'(y) = (y^n + a\xi^n) + \sum a_{\alpha\beta} \xi^\alpha y^\beta$$

formule dans laquelle $\sum$ s'étend à tous les termes de $\mathcal{Q}(y)$ dont les points représentatifs sont au-dessus de $A'B'$, et où a n'est pas nul.



Fig. 3

Mais $y^n + a\xi^n$ peut se décomposer en n facteurs linéaires distincts. $\mathcal{Q}'(y)$ est donc décomposable (§ 3. 6) en un produit de n facteurs :

$$(2) \quad \mathcal{Q}'(y) = \prod_{i=1}^n (y - p_i(\xi)) \quad [\xi]$$

dans lequel les $p_i(\xi)$ sont des séries ordonnées suivant les puissances croissantes de ξ , commençant toutes par un terme du premier degré.

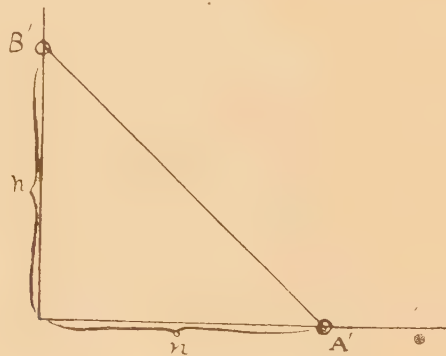


Fig. 4

De (2) nous déduirons aussitôt

$$(3) \quad \mathcal{Q}(y) = \prod_{i=1}^n (y - p_i(x^{\frac{1}{n}})) \quad [x]$$

de sorte que π racine de (1) ne peut être que l'une ou l'autre des n séries $p_i(x^{\frac{1}{n}})$.

2. — Les fonctions $1, \pi, \pi^2, \dots, \pi^{n-1}$, nécessairement indépendantes à cause de l'irréductibilité de (1), constituent une base de E, et l'on a en particulier

$$(4) \quad y_0 \simeq C_0 + C_1 \pi + \dots + C_{n-1} \pi^{n-1}$$

où les $C_0, C_1, \dots, C_{n-1}$ sont des séries rationnelles en x .

Nous en concluons immédiatement, après avoir ordonné convenablement les termes du second membre de (4), que y_0 est nécessairement une série ordonnée suivant les puissances croissantes de $x^{\frac{1}{n}}$. Dans cette série figurent en outre forcément, comme exposants des x , certaines fractions qui, mises sous forme réduite, admettent n comme dénominateur.

Si ce n'était pas le cas en effet, l'on aurait, en désignant par l un nombre inférieur à n , l séries conjuguées et distinctes, $y_0, y'_0, y''_0, \dots, y_0^{(l-1)}$, et le produit

$$(y - y_0) (y - y'_0) \dots (y - y_0^{(l-1)})$$

polynôme en y de degré l , aurait comme coefficients des séries rationnelles en x . Résultat contradictoire, puisque y_0 ne peut être racine d'une équivalence de degré inférieur à n .

On a donc $l = n$ et l'on voit en outre que l'équivalence irréductible de degré n , $\mathfrak{E}(y) \simeq 0$, admettant la racine y_0 , admet nécessairement $(n - 1)$ autres racines, $y'_0, y''_0, \dots, y_0^{n-1}$.

DEUXIÈME PARTIE

§ 8. — Remarques préliminaires.

1. — Nous avons vu (§ 3. 8) qu'un polynôme en y dont les coefficients sont à caractères entiers, est nécessairement réductible, lorsque ses termes indépendants de x se réduisent à un polynôme entier dont deux ou plusieurs racines sont distinctes.

Nous revenons sur ce point là, en partant d'une proposition d'algèbre élémentaire (conséquence du reste du lemme § 3. 1).

Si deux polynômes entiers en x , A et B, ont un résultant différent de zéro, il existe toujours, quel que soit le polynôme entier C, deux autres polynômes U et V tels qu'identiquement l'on ait

$$(1) \quad AU + BV = C.$$

Si les degrés respectifs de A et B sont k et l , U et V pourront être choisis de degrés respectivement inférieurs à l et k , et cela d'une manière unique, lorsque C est de degré au plus égal à $k + l - 1$.

Nous pourrons, au moyen de ce lemme, obtenir les séries, racines d'un polynôme quelconque $\mathcal{P}(y)$ et montrer qu'elles sont convergentes lorsque les coefficients de $\mathcal{P}(y)$ le sont aussi.

2. — Un polynôme quelconque $\mathcal{P}(y)$, tel que ceux considérés dans (1) du § 2. 1, étant donné, nous l'ordonnons suivant les puissances croissantes de x et obtenons

$$(2) \quad \mathcal{P}(y) = F(y) + xF_1(y) + x^2 F_2(y) + \dots + x^n F_n(y) + \dots$$

Tous les coefficients du second membre sont des polynômes entiers de degré $(n - 1)$ au plus, à coefficients constants. Seul $F(y)$ est de degré égal à n .

Par hypothèse, deux racines de $F(y)$ sont au moins distinctes; en conséquence, nous écrivons

$$(3) \quad F(y) = H(y) G(y),$$

en choisissant $H(y)$ et $G(y)$ sans diviseur commun. De plus, k et l sont les degrés respectifs de $H(y)$ et $G(y)$ et nous avons

$$(4) \quad k + l = n.$$

Comme H et G ont un résultant différent de zéro, nous pouvons, par application du lemme 1, trouver deux suites de polynômes entiers en y , tous bien déterminés $H_1, H_2, H_3, \dots$ de degrés au plus égaux à $k - 1$, $G_1, G_2, G_3, \dots$ de degrés au plus égaux à $l - 1$, vérifiant successivement les identités :

$$\begin{aligned} & F_1 = HG_1 + GH_1 \\ (5) \quad & F_2 - H_1 G_1 = HG_2 + GH_2 \\ & F_3 - (H_1 G_2 + H_2 G_1) = HG_3 + GH_3 \\ & \dots \dots \dots \end{aligned}$$

lesquelles s'écrivent encore

$$\begin{aligned} & F_1 = HG_1 + GH_1 \\ (6) \quad & F_2 = HG_2 + H_1 G_1 + H_2 G \\ & F_3 = HG_3 + H_1 G_2 + H_2 G_1 + H_3 G \\ & \dots \dots \dots \end{aligned}$$

Si donc nous posons

$$\begin{aligned} \mathcal{H}(y) &= H(y) + x H_1(y) + x^2 H_2(y) + \dots \\ \mathcal{G}(y) &= G(y) + x G_1(y) + x^2 G_2(y) + \dots \end{aligned}$$

nous aurons en conséquence

$$\mathcal{F}(y) = \mathcal{H}(y) \mathcal{G}(y) \quad [x]$$

et aurons ainsi effectué une décomposition de $\mathcal{F}(y)$.

3. Dans le cas où $F(y)$ a toutes ses racines égales, une décomposition telle que (3) n'est plus possible, et il faut modifier notre procédé.

Nous pouvons supposer que $F(y) = y^n$, puisque un changement de variable de la forme $y - a = y'$, effectué dans $\mathcal{F}(y)$, nous ramène à ce cas-là. Dans cette hypothèse, le contour polygonal dans le diagramme qui correspond à $\mathcal{F}(y)$ peut être ou non brisé, mais son premier côté ne coïncide pas avec l'axe des abscisses.

Nous distinguons deux cas.

PREMIER CAS. — Le contour du diagramme est brisé.

Nous nous reportons à la figure 1 du § 2, et remarquons que l'on peut alors écrire

$$(7) \quad \mathcal{F}(y) = y^{n - \beta_1} f^{(1)}(y, x) + \sum A_{\alpha\beta} x^\alpha y^\beta$$

formule dans laquelle $y^{n - \beta_1} f^{(1)}(y, x)$ comprend les termes de $\mathcal{F}(y)$ dont les points représentatifs sont situés sur $A_0 A_1$. Les points de coordonnées (β, α) qui correspondent à Σ , sont tous situés au-dessus de $A_0 A_1$ et de son prolongement.

On a encore (§ 2. 4), après avoir désigné l'inclinaison de $A_0 A_1$ par la fraction réduite $\frac{p_1}{q_1}$:

$$(8) \quad np_1 < \alpha q_1 + \beta p_1.$$

La substitution

$$y = z \xi^{p_1}, \quad x = \xi^{q_1}$$

transforme alors le second membre de (7) en $\xi^{np_1} \mathcal{F}'(z)$ où

$$\mathcal{F}'(z) = \left[z^{n-\beta_1} G(z) + \xi^\varepsilon \sum A_{\alpha\beta} \xi^\alpha z^\beta \right].$$

Dans $\mathcal{F}'(z)$, $G(z)$, à cause de la forme particulière de $f^{(1)}(y, x)$, ((5) du § 2. 8), est un polynôme entier en z , dont aucune racine n'est égale à zéro ; et ε , à cause de (8), un exposant positif différent de zéro.

$\mathcal{F}'(z)$ est donc, d'après 2, décomposable en deux facteurs

$$(9) \quad \mathcal{F}'(z) = \mathcal{H}'(z) \mathcal{G}'(z) \quad [\xi]$$

où

$$\mathcal{H}'(z) = z^{n-\beta_1} + \xi H_1(z) + \xi^2 H_2(z) + \dots$$

$$\mathcal{G}'(z) = G(z) + \xi G_1(z) + \xi^2 G_2(z) + \dots$$

Les deux membres de (9) multipliés par ξ^{np_1} donnent ensuite

$$\xi^{np_1} \mathcal{F}'(z) = (\xi^{(n-\beta_1)p_1} \mathcal{H}'(z)) (\xi^{\beta_1 p_1} \mathcal{G}'(z)) \quad [\xi]$$

et nous avons, là encore, une décomposition de $\mathcal{F}(y)$. Ici en effet il est possible, comme au § 3. 3, de remplacer dans les deux facteurs du second membre et sans introduction d'aucune irrationnelle ou de puissances négatives de ξ , $z \xi^{p_1}$ par y et ξ^{q_1} par x .

DEUXIÈME CAS. — Le contour du diagramme est rectiligne.

Ici, la substitution $y = z \xi^p$, $x = \xi^q$ transforme les polynômes $f(y, x)$ et $g(y, x)$ dans § 3. 6 en deux expressions

$$\xi^{r_1 p q} F(z) \quad \text{et} \quad \xi^{(r_2 + r_3 + \dots + r_i) + p q} G(z)$$

dans lesquelles

$$F(z) = (z^q + a_1)$$

$$G(z) = (z^q + a_2)^{r_2} (z^q + a_3)^{r_3} \dots (z^q + a_i)^{r_i};$$

$\mathcal{F}(y)$ devient $\xi^{(r_1 + r_2 + \dots + r_i) p q} \mathcal{F}'(z)$ et l'on a

$$\mathcal{F}'(z) = F(z) G(z) + \sum A_{\alpha\beta} \xi^\alpha y^\beta$$

avec α toujours supérieur à zéro. Comme le résultant de $F(z)$ et $G(z)$ n'est pas nul, on peut ici encore opérer comme dans 2, et, après avoir obtenu la décomposition de $\mathcal{F}(z)$, passer à celle de $\mathcal{F}(y)$.

4. — Si l'on a

$$(10) \quad A'_0 A_0 \simeq 1$$

les racines de

$$(11) \quad A_0 y^n + A_1 y^{n-1} + \dots + A_n \simeq 0$$

seront les mêmes que celles de

$$(12) \quad y^n + A'_0 A_1 y^{n-1} + \dots + A'_0 A_n \simeq 0.$$

Si, de plus, les coefficients de l'équivalence (12) ne sont pas tous à caractère entier, une substitution

$$(13) \quad y = \frac{\tilde{y}}{x^k}$$

où k représente un certain entier, la transformera en une autre de cette forme-là. Des racines du polynôme ainsi obtenu l'on passera facilement à celles de (11).

Nous pouvons en conséquence, dans la détermination effective des racines des polynômes, supposer qu'ils sont de la forme

$$(14) \quad y^n + A_1 y^{n-1} + \dots + A_n$$

dans laquelle les séries rationnelles $A_1, A_2, \dots, A_n$ sont toutes à caractère entier.

Si, en outre, A_0 dans (10) est une série convergente dans le voisinage de $x = 0$ (à l'exclusion peut-être du point $x = 0$ lui-même), il en est de même de A'_0 , et par conséquent des coefficients de (12) si ceux de (11) le sont aussi. Les coefficients de (12) et ceux du polynôme que l'on obtient après une transformation telle que (13), sont aussi simultanément convergents. Il suffira donc, pour la démonstration de convergence des racines d'un polynôme en y , de considérer un polynôme tel que (14), dont les coefficients, séries rationnelles entières, convergeront tous dans le voisinage de $x = 0$.

§ 9. — Détermination effective des racines d'une équivalence.

Un polynôme en y , $\mathcal{F}(y)$, dont les coefficients sont à caractère entier, étant donné, son contour dans le diagramme qui lui correspond est en général brisé et admet un premier côté coïncidant avec l'axe des abscisses. On peut alors, par le procédé indiqué dans § 8. 2, obtenir le facteur $\mathcal{H}(y)$ qui correspond à ce premier côté et décomposer ainsi $\mathcal{F}(y)$ en deux facteurs :

$$\mathcal{F}(y) = \mathcal{H}(y) \mathcal{Q}(y) \quad [x]$$

Le diagramme relatif à $\mathcal{Q}(y)$ aura généralement aussi son contour brisé, mais son premier côté ne pourra se confondre avec l'axe des abscisses. Nous utilisons alors la méthode § 8. 3 et obtenons le facteur $\mathcal{J}(y)$ qui correspond à ce dernier côté. Et ainsi de suite ; de la sorte, on arrivera à mettre $\mathcal{L}(y)$ sous la forme

$$\mathcal{L}(y) = \mathcal{H}(y) \mathcal{J}(y) \dots \mathcal{L}(y) \quad [\omega]$$

Dans cette dernière relation, les facteurs du second membre admettent tous des

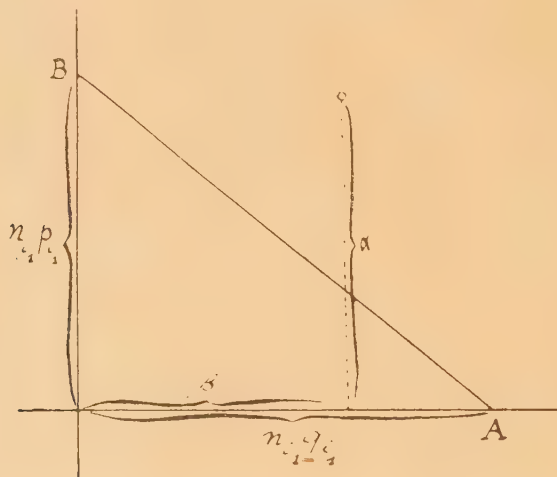


Fig. 5

contours rectilignes et sont en conséquence décomposables chacun en facteurs de la forme

$$(1) \quad (y^{q_{i_1}} + a_{i_1} x^{p_{i_1}})^{n_{i_1}} + \sum A_{\alpha\beta} x^\alpha y^\beta$$

dont le diagramme peut être caractérisé par une figure telle que (fig. 5) dans laquelle les points représentatifs de

$$(y^{q_{i_1}} + a_{i_1} x^{p_{i_1}})^{n_{i_1}},$$

sont situés sur AB et ceux de $\sum A_{\alpha\beta} x^\alpha y^\beta$ au-dessus de AB.

La substitution

$$(2) \quad \omega = \xi_1^{q_{i_1}}$$

transforme les facteurs (1) en expressions :

$$(y^{q_{i_1}} + a_{i_1} \xi_1^{p_{i_1} q_{i_1}})^{n_{i_1}} + \sum A_{\alpha\beta} \xi_1^{\alpha q_{i_1}} y^\beta$$

En convenant d'étendre le produit $\prod$ à tous les facteurs $\mathfrak{F}_{i_1}$ que l'on déduit de $\mathcal{H}(y)$, $\mathfrak{F}_1(y), \dots, \mathfrak{F}(y)$, nous avons :

$$(5) \quad \mathfrak{F}(y) = \prod \mathfrak{F}_{i_1}(y).$$

Les nombres n_{i_1} et q_{i_1} dans $\mathfrak{F}_{i_1}$ vérifient l'inégalité

$$(6) \quad n_{i_1} q_{i_1} \leq n,$$

comme conséquence de

$$\sum n_{i_1} q_{i_1} = n$$

où n est le degré de $\mathfrak{F}(y)$.

Nous remarquons enfin, lorsque le premier côté dans le diagramme de $\mathfrak{F}(y)$ se confond avec l'axe des abscisses, que les diviseurs (1) qui lui correspondent sont de la forme

$$(y + a_{i_1})^{n_{i_1}} + \sum A_{\alpha\beta} x^\alpha y^\beta$$

où $\alpha > 0$.

Or ici $q_{i_1} = 1$, $p_{i_1} = 0$, et la substitution (2), ici $x = \xi_1$, nous conduit bien à des polynômes du type (4). Nous n'avons donc là rien d'exceptionnel, et nos considérations sont tout à fait générales.

Par la substitution

$$(7) \quad y + a_{i_1}^{1/q_{i_1}} \xi_1^{p_{i_1}} = y_1$$

effectuée dans $\mathfrak{F}_{i_1}(y)$, nous obtenons un nouveau polynôme que nous désignons par $\mathfrak{F}_{i_1}(y_1)$ et qui peut s'écrire

$$\mathfrak{F}_{i_1}(y_1) = y_1^{n_{i_1}} + \sum_{\substack{\mu \geq 1 \\ 0 \leq \gamma \leq n_{i_1} - 1}} A_{\mu\gamma} \xi_1^\mu y_1^\gamma.$$

Dans celui-ci, les variables sont y_1 et ξ_1 de sorte que, lui appliquant les procédés de décomposition que nous venons d'effectuer sur $\mathfrak{F}(y)$, nous obtenons une décomposition en facteurs telle que (5) :

$$(8) \quad \mathfrak{F}_{i_1}(y_1) = \prod \mathfrak{F}_{i_1 i_2}(y_1)$$

où

$$\mathfrak{F}_{i_1 i_2}(y_1) = \left(y_1 + a_{i_1 i_2}^{1/q_{i_1 i_2}} \xi_2^{p_{i_1 i_2}} \right)^{n_{i_1 i_2}} + \sum_{\substack{\mu \geq 1 \\ 0 \leq \beta \leq n_{i_1 i_2} - 1}} A_{\mu\beta} \xi_2^\mu y_1^\beta.$$

On obtient ainsi toutes les racines de l'équivalence $\mathcal{P}(y) \approx 0$. Celle-ci se répartissent en systèmes circulaires, résultat connu d'ailleurs sur lequel nous n'avons pas à insister ici.

§ 10. — Démonstration de convergence.

La méthode développée dans le paragraphe précédent fait usage uniquement du lemme indiqué dans § 8. 1. Si donc nous reprenons les notations du § 8. 2 et faisons voir que les coefficients de $\mathcal{H}(y)$ et $\mathcal{G}(y)$ convergent dans le voisinage de $x = 0$ lorsqu'il en est de même de ceux de $\mathcal{P}(y)$, nous aurons par le fait même démontré que les racines de $\mathcal{P}(y) \approx 0$ sont convergentes dans le voisinage de $x = 0$.

Supposer que les coefficients de $\mathcal{P}(y)$ sont tous à caractères entiers, n'est pas (§ 8. 4) une hypothèse restrictive. Soit donc

$$(1) \quad \mathcal{P}(y) = \mathcal{H}(y) \mathcal{G}(y) \quad [x]$$

avec

$$(2) \quad \begin{cases} \mathcal{P}(y) = y^n + \dots + A_i(x) y^{n-i} + \dots + A_n(x) \\ \mathcal{H}(y) = y^k + \dots + B_i(x) y^{k-i} + \dots + B_k(x) \\ \mathcal{G}(y) = y^l + \dots + B'_i(x) y^{l-i} + \dots + B'_l(x) \end{cases}$$

où

$$(3) \quad \begin{cases} A_i(x) = a_{i0} + a_{i1} x + \dots + a_{iN} x^N + \dots \\ (i = 1, 2, \dots, n) \\ B_i(x) = b'_{i0} + b'_{i1} x + \dots + b'_{iN} x^N + \dots \\ (i = 1, 2, \dots, k) \\ B'_i(x) = b''_{i0} + b''_{i1} x + \dots + b''_{iN} x^N + \dots \\ (i = 1, 2, \dots, l) \end{cases}$$

N indique un terme de rang quelconque, et les a_{i0} , b'_{i0} , b''_{i0} , puisque nous nous plaçons dans le cas de § 8. 2, ne sont pas tous nuls.

Ordonnés suivant les puissances croissantes de x :

$$(4) \quad \begin{cases} \mathcal{P}(y) = F(y) + x F_1(y) + \dots + x^N F_N(y) + \dots \\ \mathcal{H}(y) = H(y) + x H_1(y) + \dots + x^N H_N(y) + \dots \\ \mathcal{G}(y) = G(y) + x G_1(y) + \dots + x^N G_N(y) + \dots \end{cases}$$

où, à cause de (3) et pour $N \geq 1$:

$$(5) \quad \begin{cases} F_N(y) = a_{1N}y^{n-1} + \dots + a_{iN}y^{n-i} + \dots + a_{nN} \\ H_N(y) = b'_{1N}y^{k-1} + \dots + b'_{iN}y^{k-i} + \dots + b'_{kN} \\ G_N(y) = b''_{1N}y^{l-1} + \dots + b''_{iN}y^{l-i} + \dots + b''_{lN} \end{cases}$$

Les polynômes $F(y)$, $H(y)$ et $G(y)$ sont respectivement de degrés égaux à n , k et l .

Les coefficients de $\mathcal{F}(y)$ sont par hypothèse convergents dans le voisinage de $x = 0$. Soit en conséquence g la plus grande des valeurs absolues, prise par chacune des séries $A_i(x)$ sur la circonférence d'un cercle de rayon R et de centre $x = 0$, compris à l'intérieur de tous leurs cercles de convergence. Nous avons alors, d'après une proposition connue de la théorie des fonctions :

$$(6) \quad |a_{iN}| \leq \frac{g}{R^N}.$$

Les égalités (5) du § 8 donnent également :

$$(7) \quad F_N - (H_1 G_{N-1} + H_2 G_{N-2} + \dots + H_{N-1} G_1) = H G_N + G H_N$$

ou plus simplement

$$(8) \quad \Phi_N = H G_N + G H_N,$$

identité dans laquelle le premier membre est un polynôme de degré $n - 1$ au plus. On en déduit, connaissant Φ_N , H et G , les polynômes H_N et G_N . La méthode des coefficients indéterminés, que nous employons pour la détermination de ces derniers, conduit alors à un système de $k + l = n$ équations linéaires. Leur déterminant est le résultant de H et G qui, par hypothèse, est différent de zéro. Les seconds membres de ces n équations sont, dans un ordre déterminé, les n coefficients de Φ_N . Il en résulte que, en représentant par e_N un nombre positif supérieur à la plus grande des valeurs absolues des coefficients de Φ_N , et par $\frac{A}{n}$ la plus grande valeur absolue prise par un mineur du 1^{er} ordre du résultant, divisé par ce résultant lui-même, nous aurons

$$(9) \quad |b_N| \leq e_N A$$

où b_N est l'un quelconque des coefficients b'_{iN} ou b''_{iN} entrant dans H_N et G_N .

Les polynômes H_1 et G_1 vérifient la relation

$$F_1 = H G_1 + G H_1,$$

de sorte que, pour chacun des coefficients b_1 de l'un ou l'autre de ces polynômes, l'on aura :

$$(10) \quad |b_1| \leq \frac{g}{R} A$$

puisque, à cause de (6),

$$e_1 \leq \frac{g}{R}.$$

Les polynômes H_2 et G_2 vérifient la relation

$$F_2 - H_1 G_1 = H G_2 + G H_2,$$

dans le premier membre de laquelle les coefficients de F_2 sont, en vertu de (6), tous en valeur absolue inférieurs à $\frac{g}{R^2}$, tandis que ceux de $H_1 G_1$, étant de la forme

$$\sum b'_{i1} b''_{j1},$$

sont, à cause de (10), tous inférieurs en valeur absolue à

$$\lambda \frac{g^2}{R^2} A^2;$$

λ représente le nombre maximum des produits $b'_{i1} b''_{j1}$, dont un coefficient de $H_1 G_1$ peut être la somme; il restera le même, quels que soient les produits $H_N G_N$ que nous considérerons dans la suite de cette démonstration.

On a donc

$$e_2 \leq \frac{g}{R^2} + \lambda \frac{g^2}{R^2} A^2$$

et par conséquent

$$e_2 \leq \frac{2g}{R^2} \quad \text{dans le cas de } \lambda g A^2 \leq 1$$

ou

$$e_2 < \frac{2g}{R^2} \lambda g A^2 \quad \text{dans le cas de } \lambda g A^2 > 1.$$

Dans la première de ces deux alternatives, à cause de (9), nous avons

$$|b_2| \leq 2 \frac{gA}{R^2}$$

et dans la seconde

$$|b_2| < 2 \frac{gA}{R^2} (\lambda g A^2).$$

Nous sommes ainsi conduits à supposer que, pour $\lambda g A^2 \leq 1$, l'on a

$$(11) \quad |b_N| \leq m_N \frac{gA}{R^N}$$

inégalité dans laquelle m_N représente un certain coefficient. Comme elle se trouve vérifiée pour N égal à 1 et 2, nous allons la supposer vraie pour N égal à 1, 2, ... ($N-1$) et démontrer qu'elle est exacte encore pour N .

Dans ce cas en effet, si l'on tient compte de (7), l'on a

$$e_N \leq \frac{g}{R^N} + \lambda \sum_{j=1}^{N-1} m_j \frac{gA}{R^j} m_{N-j} \frac{gA}{R^{N-j}}$$

c'est-à-dire

$$e_N \leq \frac{g}{R^N} \left(1 + \lambda g A^2 \sum_{j=1}^{N-1} m_j m_{N-j} \right)$$

et à fortiori

$$e_N \leq \frac{g}{R^N} \left(1 + \sum_{j=1}^{N-1} m_j m_{N-j} \right)$$

pour $\lambda g A^2 \leq 1$.

Ainsi l'inégalité (11) se trouve établie, et l'on voit en outre que

$$(12) \quad m_N = 1 + \sum_{j=1}^{N-1} m_j m_{N-j}.$$

De la même façon, l'on verrait que, pour $\lambda g A^2 > 1$, l'on a

$$(13) \quad |b_N| < m_N \frac{gA}{R^N} (\lambda g A^2)^{N-1}$$

où m_N représente encore le nombre défini par (12).

Si maintenant nous revenons aux égalités (3), nous voyons, en tenant compte de (11) et (13), que les séries $B_i(x)$ et $B'_i(x)$ sont convergentes, en même temps que

$$(14) \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{gA}{R^n} m_n x^n,$$

si $\lambda g A^2 \leq 1$; en même temps que

$$(15) \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{gA}{R^n} (\lambda g A^2)^{n-1} m_n x^n = \frac{1}{\lambda g A^2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{gA}{R^n} (\lambda g A^2)^n m_n x^n,$$

si $\lambda g A^2 > 1$.

Il suffit donc, pour établir la convergence des séries $B_i(x)$ et $B'_i(x)$, d'établir celle de la série

$$(16) \quad z = \sum_{N=1}^{\infty} m_N t^N$$

dans laquelle $m_1 = 1$, $m_2 = 2$ et où m_N , d'une façon générale, est le nombre défini par la formule récurrente (12).

Dans ces conditions, si la série (16) est convergente, comme l'on a successivement

$$(17) \quad \begin{aligned} z^2 &= m_1^2 t^2 + (m_1 m_2 + m_2 m_1) t^3 + \dots \\ z^2 &= (m_2 - 1) t^2 + (m_3 - 1) t^3 + (m_4 - 1) t^4 + \dots \\ z^2 &= z - \frac{t}{1-t} \end{aligned}$$

l'on a nécessairement

$$z = \frac{1}{2} \left(1 - \sqrt{\frac{1-5t}{1-t}} \right)$$

puisque, pour $t = 0$, z doit s'annuler.

Mais cette dernière déduction suppose expressément la convergence de (16) et nous ne pourrions écrire

$$(18) \quad \sum_{N=1}^{\infty} m_N t^N = \frac{1}{2} \left(1 - \sqrt{\frac{1-5t}{1-t}} \right)$$

qu'après avoir démontré que le développement en série de

$$\frac{1}{2} \left(1 - \sqrt{\frac{1-5t}{1-t}} \right)$$

coïncide bien avec

$$\sum_{N=1}^{\infty} m_N t^N.$$

On le voit en remarquant que la dérivée $N^{\text{ième}}$, prise dans les deux membres de (17), conduit à la relation

$$z z^{(N)} + \binom{N}{1} z' z^{(N-1)} + \dots + \binom{N}{j} z^{(j)} z^{(N-j)} + \dots + z^{(N)} z = z^{(N)} - \frac{N!}{(1-t)^{N+1}}$$

laquelle, par le fait que $z = 0$ pour $t = 0$, nous donne :

$$\frac{z_0^{(N)}}{N!} = 1 + \sum_{j=1}^{N-1} \frac{z_0^{(j)}}{j!} \frac{z_0^{(N-j)}}{(N-j)!}$$

où $z_0^{(j)}$ représente ce que devient $z^{(j)}$ pour $t = 0$.

Ceci n'est pas autre chose que la relation (12) mise sous une autre forme.

L'égalité (18) étant ainsi rigoureusement établie, nous en concluons immédiatement la convergence de (16) pour

$$|t| < \frac{1}{5}$$

A cause des hypothèses faites, les coefficients $B_i(x)$ et $B'_i(x)$ de $\mathcal{H}(y)$ et $\mathcal{G}(y)$ sont des séries convergentes dans des cercles de rayons finis. Ces derniers, suivant que l'on a $\lambda g A^2 \leq 1$ ou $\lambda g A^2 > 1$, sont au moins égaux soit à $\frac{R}{5}$ soit à $\frac{R}{5\lambda g A^2}$.

TROISIÈME PARTIE

—

§ 11. — Généralités, problème fondamental, systèmes équivalents et systèmes normaux.

1. — En désignant par R_x la surface de Riemann et par $E(x, y)$ le corps de fonctions algébriques qui correspond à l'équation irréductible

$$(1) \quad F(y, x) = 0,$$

le problème considéré par M. Hensel comme fondamental pour la théorie des fonctions algébriques peut s'énoncer comme suit ⁽¹⁾ :

Trouver toutes les fonctions du corps $E(x, y)$ régulières en tout point de R_x sauf peut-être aux points en nombre fini

$$A, A', A'', \dots A^{(\nu)},$$

où leur ordre doit respectivement être au moins égal à

$$\lambda, \lambda', \lambda'', \dots \lambda^{(\nu)}.$$

On sait qu'il n'y a pas d'inconvénient à supposer tous les points $A^{(i)}$ situés dans le fini, tous les points à l'infini de R_x étant eux-mêmes simples. C'est l'hypothèse que nous faisons en conséquence pour la suite.

2. — Dans le corps $E(x, y)$ existent toujours, si n est le degré de $F(y, x)$ par rapport à y , n fonctions rationnellement indépendantes $\eta_1, \eta_2 \dots \eta_n$ telles que toute fonction η de $E(x, y)$ puisse et cela d'une manière unique se mettre sous la forme

$$\eta = u_1 \eta_1 + u_2 \eta_2 + \dots + u_n \eta_n$$

où les $u_1, u_2, \dots u_n$ sont des fonctions rationnelles de x .

(1) Voir à propos de ce problème et de toutes les définitions et démonstrations se rattachant à ce qui suit, le grand traité de MM. Hensel et Landsberg « *Theorie der algebraischen Functionen einer Variablen und ihre Anwendung auf algebraische Kurven und abelsche Integrale* » paru chez Teubner à Leipzig en 1902. Une solution du problème qui nous occupe se trouve développée dans les chapitres XI^e, XIV^e et XV^e.

De tels systèmes sont dits *systèmes rationnellement indépendants*. On les désigne aussi sous le nom de *base* de $E(x, y)$. La condition nécessaire et suffisante pour qu'un système (η_i) soit base de $E(x, y)$ est que le déterminant

$$\begin{vmatrix} \eta_1^{(1)} & \eta_2^{(1)} & \dots & \eta_n^{(1)} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \eta_1^{(n)} & \eta_2^{(n)} & \dots & \eta_n^{(n)} \end{vmatrix} = \left| \eta_i^{(k)} \right|$$

de celui-ci soit différent de zéro. Ici, comme dans la suite, $\eta_i^{(k)}$ représente ce que devient la fonction $\eta_i = \varphi(y, x)$ lorsqu'on y remplace y par sa conjuguée $y^{(k)}$ déduite de (1).

3. — L'étude des fonctions algébriques conduit à la considération des *systèmes équivalents*. Sans revenir sur leur définition nous rappelons que :

Tout système de n fonctions ξ_i est équivalent à un autre système rationnellement indépendant (η_h) si :

1° Chacune des fonctions ξ_i peut se mettre sous la forme

$$\xi_i = \sum_{h=1}^n b_{ih} \eta_h$$

dans laquelle les b_{ih} sont des polynômes entiers en x et si :

2° Le déterminant $\left| \xi_i^{(k)} \right|$ du système ξ_i est à un facteur constant près différent de zéro. égal à celui $\left| \eta_i^{(k)} \right|$ du système (η_i) ⁽¹⁾.

4. — Si $x = a$ est une quantité finie à laquelle correspondent n points simples de R_x , les n développements d'une fonction η_i du système rationnellement indépendant (η_i) peuvent s'écrire en supposant que les coefficients $a_i^{(k)}$ ne sont pas tous nuls :

$$\eta_i^{(k)} = a_i^{(k)} (x-a)^{\rho_i} + b_i^{(k)} (x-a)^{\rho_i+1} + \dots$$

($k = 1, 2 \dots n$)

Dans le développement en série

$$\begin{vmatrix} a_1^{(1)} & a_2^{(1)} & \dots & a_n^{(1)} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_1^{(n)} & a_2^{(n)} & \dots & a_n^{(n)} \end{vmatrix} (x-a)^{\rho_1 + \rho_2 + \dots + \rho_n} + \dots$$

⁽¹⁾ H. et L. — *Loc. cit.*, p. 160.

du déterminant

$$\left| \eta_i^{(k)} \right| = \begin{vmatrix} a_1^{(1)}(x-a)^{\rho_1} + ., & a_2^{(1)}(x-a)^{\rho_2} + ., & \dots, & a_n^{(1)}(x-a)^{\rho_n} + ., \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_1^{(n)}(x-a)^{\rho_1} + ., & a_2^{(n)}(x-a)^{\rho_2} + ., & \dots, & a_n^{(n)}(x-a)^{\rho_n} + ., \end{vmatrix}$$

il peut se faire que le premier terme dont le coefficient n'est pas nul soit une puissance d de $(x-a)$ égale ou supérieure à $\rho_1 + \rho_2 + \dots + \rho_n$.

Si le déterminant $\left| a_i^{(k)} \right|$ est différent de zéro, nous avons

$$d = \rho_1 + \rho_2 + \dots + \rho_n$$

et dans ce cas l'on dit que le système (η_i) est *normal* pour $x = a$. S'il ne l'est pas il est possible de construire un système normal pour $x = a$ qui lui soit équivalent.

Le déterminant $\left| a_i^{(k)} \right|$ est alors égal à zéro et il existe par conséquent un système de constantes $\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_n$ telles que

$$a_1^{(k)} \beta_1 + a_2^{(k)} \beta_2 + \dots + a_n^{(k)} \beta_n = 0.$$

($k = 1, 2, \dots, n$.)

Soit β_s la dernière d'entre elles différente de zéro et supposons les notations choisies de manière à avoir

$$\rho_1 \leq \rho_2 \leq \dots \leq \rho_n.$$

On forme la fonction

$$\xi = \beta_1 (x-a)^{\rho_s - \rho_1} \eta_1 + \dots + \beta_{s-1} (x-a)^{\rho_s - \rho_{s-1}} \eta_{s-1} + \beta_s \eta_s$$

et l'on remarque que les deux systèmes

$$\eta_1, \eta_2, \dots, \eta_{s-1}, \quad \eta_s, \eta_s + 1, \dots, \eta_n$$

et

$$\eta_1, \eta_2, \dots, \eta_{s-1}, \quad \xi, \eta_s + 1, \dots, \eta_n$$

sont équivalents. Mais comme les développements de ξ dans le voisinage de $x = a$ commencent tous par une puissance de $(x-a)$ supérieure à ρ_s , le second système sera peut-être normal. S'il ne l'est pas, on le transforme comme le premier. Après un nombre fini de telles opérations et du fait que d reste invariable, on obtient un système équivalent au système primitif et normal pour $x = a$.

5. — Dans le cas où les points à l'infini de R_x sont tous simples les mêmes considérations sont applicables. On définit de la même manière que ci-dessus les

systèmes normaux pour $x = \infty$ et une démonstration à peu près identique à celle qui précède montrerait qu'il est toujours possible, un système rationnellement indépendant étant donné, de construire un autre système normal pour $x = \infty$ qui lui soit équivalent.

6. — Soit maintenant η une fonction quelconque de $E(x, y)$ et

$$\eta^{(k)} = a^{(k)} \left(\frac{1}{x}\right)^\rho + \dots$$

($k = 1, 2, \dots, n$)

ses n développements pour $x = \infty$, ρ étant le plus petit exposant tel que les coefficients $a^{(k)}$ ne soient pas tous seuls.

A cet exposant ρ nous donnons le nom d'*exposant de la fonction* η et nous nous bornons à énoncer la proposition :

Lorsqu'un système $\eta_1, \eta_2, \dots, \eta_n$ est normal pour $x = \infty$, l'exposant de toute fonction θ de la forme

$$\theta = u_1 \eta_1 + u_2 \eta_2 + \dots + u_n \eta_n$$

dans laquelle les u_i sont des polynômes entiers en x de degrés respectivement égaux à r_i , est égal à la plus petite des quantités

$$-r_1 + \rho_1, \quad -r_2 + \rho_2, \quad \dots, \quad -r_n + \rho_n$$

ou $\rho_1, \rho_2, \dots, \rho_n$ sont les exposants respectifs des fonctions $\eta_1, \eta_2, \dots, \eta_n$.

On peut étendre encore la définition des systèmes normaux au cas où des points de ramification correspondent à x fini ou infini et le théorème ci-dessus n'est qu'un cas particulier d'une proposition plus générale ⁽¹⁾.

§ 12. — Systèmes fondamentaux relatifs à $x = a$.

1. — Etant donné un certain nombre de points analytiques, on peut, en affectant d'exposants entiers positifs, nuls ou négatifs, les lettres $A, B, \dots, L$ qui servent à les désigner, former un produit symbolique

$$D = A^\alpha B^\beta \dots L^\lambda$$

auquel M. Hensel a donné le nom de *diviseur algébrique*.

⁽¹⁾ H et L. — *Loc. cit.* p. 165 et suivantes.

Les lettres A, B, ... L peuvent d'ailleurs correspondre à des points quelconques de R_x situés aussi bien dans le fini qu'à l'infini.

Nous dirons alors qu'une fonction r de $E(x, y)$ admet le diviseur $\mathfrak{D}$ si, quelle que soit la manière dont elle se comporte aux points de R_x distincts de A, B, ... L, son ordre en chacun de ceux-ci est respectivement égal ou supérieur à $\alpha, \beta, \dots \lambda$.

2. — Supposons pour fixer les idées qu'à $x = a$ correspondent sur R_x trois points superposés dont les ordres de ramification sont respectivement $\alpha = 1, \beta = 1, \gamma = 1$ et tels par conséquent, que

$$\alpha + \beta + \gamma = n$$

Supposons également qu'un diviseur tel que

$$\mathfrak{A} = A_x^{\lambda\alpha} A_\beta^{\lambda\beta} A_\gamma^{\lambda\gamma}$$

soit donné; le but de ce paragraphe est de montrer comment on peut construire un système rationnellement indépendant $\eta_1, \eta_2, \dots, \eta_n$ tel que toute fonction et seules les fonctions de $E(x, y)$ admettant le diviseur $\mathfrak{A}$ puisse se mettre sous la forme

$$u_1 \eta_1 + u_2 \eta_2 + \dots + u_n \eta_n$$

où les $u_1, u_2, \dots, u_n$ seront des fonctions rationnelles de x entières pour $x = a$.

C'est à de tels systèmes que nous donnerons le nom de *systèmes fondamentaux* pour $x = a$ relativement au diviseur $\mathfrak{A}$.

On aura de même des systèmes fondamentaux pour toutes les fonctions qui admettent un diviseur quelconque ne comprenant aucune lettre relative à un point à l'infini de R_x . La construction de ceux-ci constituera l'objet principal du prochain paragraphe et conduira directement à la solution du problème que nous voulons résoudre.

3. — L'hypothèse qu'à $x = a$ ne correspondent que trois points superposés de R_x n'est nullement restrictive. Elle n'est là que pour simplifier les énoncés. Ceci admis, on voit que dans ce cas le polynôme entier $F(y, x)$ irréductible au sens usuel du mot se décompose dans le voisinage de $x = a$ en un produit de trois facteurs. On a :

$$F(y, x) = f_\alpha(y) f_\beta(y) f_\gamma(y) \quad [x = a]$$

et les trois polynômes $f_\alpha, f_\beta, f_\gamma$ sont irréductibles et distincts les uns des autres. Ils sont irréductibles parce qu'à chacun d'eux correspond un seul point analytique de R_x , et distincts parce que $F(y, x)$ et $F'_y(y, x)$ n'ont au sens habituel du mot aucun diviseur commun. Leur résultant $R(x)$ n'est en conséquence pas identiquement nul et du fait que l'on a

$$F(y, x) G(y, x) + F'_y(y, x) H(y, x) = R(x)$$

où les $a_{0,1}, a_{1,1}, \dots, a_{\alpha-1, \alpha-1}$ sont des fonctions rationnelles de $(x - a)$ et M est un entier aussi grand que l'on veut.

Dans ce système de congruences (1), le déterminant

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ a_{0,1} & a_{1,1} & \dots & a_{\alpha-1,1} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{0,\alpha-1} & a_{1,\alpha-1} & \dots & a_{\alpha-1,\alpha-1} \end{vmatrix}$$

ne peut être identiquement nul; car s'il en était ainsi, il existerait des fractions rationnelles $C_0, C_1, \dots, C_{\alpha-1}$ telles que

$$(2) \quad \Phi(y^{(1)}) = C_0 y^{(1)\alpha-1} + C_1 y^{(1)\alpha-2} + \dots + C_{\alpha-2} y^{(1)} + C_{\alpha-1} \equiv 0 \pmod{(x-a)^M}$$

où les coefficients C_i , de même que les a_{ij} , peuvent être envisagés comme ordonnés suivant les puissances croissantes de $(x - a)$.

Comme M est, dans le second membre de (2), aussi grand que l'on veut, on aurait donc simultanément $y^{(1)}$ racine de

$$f_\alpha(y) \approx 0$$

et de

$$\Phi(y) \approx 0$$

ce qui (§ 4. 2) est impossible.

On a donc bien $\Delta \not\equiv 0$ (pour M suffisamment grand).

Dans les seconds membres des congruences (1) figure certainement une puissance $(x - a)^{\frac{\lambda}{\alpha}}$ multipliée par un coefficient non identiquement nul, où $\frac{\lambda}{\alpha}$ est une fraction réduite.

De ce système (1), l'on déduit alors des fonctions rationnelles $C'_0, C'_1, \dots, C'_{\alpha-1}$, telles que la fonction

$$\theta(y, x) = C'_{\alpha-1} y^{\alpha-1} + C'_{\alpha-2} y^{\alpha-2} + \dots + C'_0,$$

pour $y = y^{(1)}$, vérifie la congruence

$$\theta(y^{(1)}, x) \equiv (x - a)^{\frac{\lambda}{\alpha}} \pmod{(x - a)^M}.$$

La fraction $\frac{\lambda}{\alpha}$ est réduite, et il existe deux entiers p et q , tels que

$$\lambda p = 1 + \alpha q,$$

tels, par conséquent, que la fonction

$$\pi_{\alpha}(y, x) = \frac{[\theta(y, x)]^p}{(x - a)^q}$$

vérifie la congruence

$$\pi_{\alpha}(y^{(1)}, x) \equiv (x - a)^{\frac{1}{\alpha}} \quad \text{mod. } (x - a)^M$$

et d'une façon plus générale les α congruences

$$(3) \quad \pi_{\alpha}(y^{(\mu)}, x) \equiv \left(\omega_{\alpha}^{\mu-1} (x - a)^{\frac{1}{\alpha}} \right) \quad \text{mod. } (x - a)^M$$

($\mu = 1, 2, \dots, \alpha$)

où ω_{α} désigne une racine $\alpha^{\text{ième}}$ primitive de l'unité.

Relativement aux $\beta + \gamma$ autres développements de $\pi_{\alpha}(y, x)$ autour des points A_{β} et A_{γ} , nous ne pouvons rien affirmer ici, si ce n'est qu'ils commencent tous par des puissances finies de $(x - a)$.

La fonction que nous venons d'obtenir se rapporte à A_{α} et nous l'avons désignée par π_{α} . Quant aux lettres π_{β} et π_{γ} , elles représenteront les fonctions analogues relatives à A_{β} et A_{γ} .

6. — Les facteurs $f_{\alpha}(y)$, $f_{\beta}(y)$, $f_{\gamma}(y)$ sont irréductibles et distincts; il existe en conséquence (§ 1. 4), après avoir posé

$$g_{\alpha} = f_{\beta} f_{\gamma}, \quad g_{\beta} = f_{\gamma} f_{\alpha}, \quad g_{\gamma} = f_{\alpha} f_{\beta}$$

d'autres polynômes en y : h_{α} , h_{β} , h_{γ} , l_{α} , l_{β} , l_{γ} , tels que

$$(4) \quad \left. \begin{aligned} f_{\alpha} h_{\alpha} + g_{\alpha} l_{\alpha} &= 1 \\ f_{\beta} h_{\beta} + g_{\beta} l_{\beta} &= 1 \\ f_{\gamma} h_{\gamma} + g_{\gamma} l_{\gamma} &= 1 \end{aligned} \right\} \quad [x - a]$$

Ceci nous donne le moyen, après avoir fixé d'une manière indépendante trois entiers M , M' , M'' aussi grands que l'on veut, de déterminer trois fonctions rationnelles en y et x , vérifiant les congruences

$$\begin{aligned} G_{\alpha}(y, x) &\equiv g_{\alpha} l_{\alpha} && \text{mod. } (x - a)^M \\ G_{\beta}(y, x) &\equiv g_{\beta} l_{\beta} && \text{mod. } (x - a)^{M'} \\ G_{\gamma}(y, x) &\equiv g_{\gamma} l_{\gamma} && \text{mod. } (x - a)^{M''}. \end{aligned}$$

Celles-ci, équivalentes aux suivantes

$$\begin{aligned} G_\alpha(y, x) &\equiv 1 - f_\alpha h_\alpha && \text{mod. } (x - a)^M \\ G_\beta(y, x) &\equiv 1 - f_\beta h_\beta && \text{mod. } (x - a)^{M'} \\ G_\gamma(y, x) &\equiv 1 - f_\gamma h_\gamma && \text{mod. } (x - a)^{M''}, \end{aligned}$$

nous montrent que l'on a

$$(5) \quad \left. \begin{aligned} G_\alpha(y^{(\mu)}, x) &\equiv 1 \\ (\mu = 1, 2, \dots, x) \\ G_\alpha(y^{(\mu)}, x) &\equiv 0 \\ (\mu = x+1, \dots, x+\beta) \\ G_\alpha(y^{(\mu)}, x) &\equiv 0 \\ (\mu = x+\beta+1, \dots, n) \end{aligned} \right\} \text{mod. } (x-a)^M \quad \left. \begin{aligned} G_\beta(y^{(\mu)}, x) &\equiv 0 \\ (\mu = 1, 2, \dots, x) \\ G_\beta(y^{(\mu)}, x) &\equiv 1 \\ (\mu = x+1, \dots, x+\beta) \\ G_\beta(y^{(\mu)}, x) &\equiv 0 \\ (\mu = x+\beta+1, \dots, n) \end{aligned} \right\} \text{mod. } (x-a)^{M'} \\ \left. \begin{aligned} G_\gamma(y^{(\mu)}, x) &\equiv 0 \\ (\mu = 1, 2, \dots, x) \\ G_\gamma(y^{(\mu)}, x) &\equiv 0 \\ (\mu = x+1, \dots, x+\beta) \\ G_\gamma(y^{(\mu)}, x) &\equiv 0 \\ (\mu = x+\beta+1, \dots, n) \end{aligned} \right\} \text{mod. } (x-a)^{M''}$$

7. — Ayant construit les trois fonctions $\pi_\alpha, \pi_\beta, \pi_\gamma$ introduites dans 5, nous pouvons alors choisir les nombres M, M', M'' de façon que les trois fonctions $G_\alpha, G_\beta, G_\gamma$ soient telles que le système

$$(6) \quad \left\{ \begin{aligned} \eta_{\alpha i} &= G_\alpha \pi_\alpha^{\lambda_\alpha + i} \\ [i = 0, 1, 2, \dots, (\alpha-1)] \\ \eta_{\beta j} &= G_\beta \pi_\beta^{\lambda_\beta + j} \\ [j = 0, 1, 2, \dots, (\beta-1)] \\ \eta_{\gamma k} &= G_\gamma \pi_\gamma^{\lambda_\gamma + k} \\ [k = 0, 1, 2, \dots, (\gamma-1)] \end{aligned} \right.$$

vérifie, à cause de (3) et de (5), les congruences

$$(7) \quad \left\{ \begin{aligned} \eta_{\alpha i}^{(\mu)} &\equiv [\omega_\alpha (x-a)^{\frac{1}{\alpha}}]^{\lambda_\alpha + i} & \eta_{\beta j}^{(\mu)} &\equiv 0 & \eta_{\gamma k}^{(\mu)} &\equiv 0 \\ (\mu = 1, 2, \dots, \alpha) \\ \eta_{\alpha i}^{(\mu)} &\equiv 0 & \eta_{\beta j}^{(\mu)} &\equiv [\omega_\beta (x-a)^{\frac{1}{\beta}}]^{\lambda_\beta + j} & \eta_{\gamma k}^{(\mu)} &\equiv 0 \\ (\mu = x+1, \dots, x+\beta) \\ \eta_{\alpha i}^{(\mu)} &\equiv 0 & \eta_{\beta j}^{(\mu)} &\equiv 0 & \eta_{\gamma k}^{(\mu)} &\equiv [\omega_\gamma (x-a)^{\frac{1}{\gamma}}]^{\lambda_\gamma + k} \\ (\mu = x+\beta+1, \dots, n) \end{aligned} \right.$$

prises suivant un module $(x - a)^M$ d'exposant fini mais aussi grand que l'on voudra ; $\omega_\alpha, \omega_\beta, \omega_\gamma$ sont respectivement racines $\alpha^{\text{ième}}$, $\beta^{\text{ième}}$ et $\gamma^{\text{ième}}$ primitives de l'unité.

En désignant le système (6) par $(\eta_1, \eta_2 \dots \eta_n)$, on obtient :

$$\left| \eta_i^{(\mu)} \right| \equiv \begin{vmatrix} D_\alpha & 0 & 0 \\ 0 & D_\beta & 0 \\ 0 & 0 & D_\gamma \end{vmatrix} \quad \text{mod. } (x - a)^M$$

où, afin d'abrégier, nous avons posé :

$$\begin{vmatrix} (x - a)^{\frac{\lambda_\alpha}{\alpha}} & (x - a)^{\frac{\lambda_\alpha + 1}{\alpha}} & \dots & (x - a)^{\frac{\lambda_\alpha + \alpha - 1}{\alpha}} \\ \left(\omega_\alpha (x - a)^{\frac{1}{\alpha}} \right)^{\lambda_\alpha} & \left(\omega_\alpha (x - a)^{\frac{1}{\alpha}} \right)^{\lambda_\alpha + 1} & \dots & \left(\omega_\alpha (x - a)^{\frac{1}{\alpha}} \right)^{\lambda_\alpha + \alpha - 1} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \left(\omega_\alpha^{\alpha-1} (x - a)^{\frac{1}{\alpha}} \right)^{\lambda_\alpha} & \left(\omega_\alpha^{\alpha-1} (x - a)^{\frac{1}{\alpha}} \right)^{\lambda_\alpha + 1} & \dots & \left(\omega_\alpha^{\alpha-1} (x - a)^{\frac{1}{\alpha}} \right)^{\lambda_\alpha + \alpha - 1} \end{vmatrix} = D_\alpha$$

et où D_β et D_γ ont des significations analogues.

Or, tous calculs effectués, l'on voit que D_α est égal au produit de $(x - a)^{\lambda_\alpha + \frac{\alpha - 1}{2}}$ par la racine carrée du discriminant de l'équation $x^\alpha = 1$, dont ω_α est racine. On a

$$D_\alpha = \alpha^{\frac{\alpha}{2}} (x - a)^{\lambda_\alpha + \frac{\alpha - 1}{2}}$$

et de même

$$D_\beta = \beta^{\frac{\beta}{2}} (x - a)^{\lambda_\beta + \frac{\beta - 1}{2}}$$

$$D_\gamma = \gamma^{\frac{\gamma}{2}} (x - a)^{\lambda_\gamma + \frac{\gamma - 1}{2}}$$

d'où

$$(8) \quad \left| \eta_i^{(\mu)} \right| \equiv b (x - a)^{\lambda_\alpha + \lambda_\beta + \lambda_\gamma + \frac{\alpha - 1}{2} + \frac{\beta - 1}{2} + \frac{\gamma - 1}{2}} \quad \text{mod. } (x - a)^M$$

où b représente un coefficient numérique différent de zéro.

Le déterminant $\left| \eta_i^{(\mu)} \right|$ n'est pas identiquement nul, de sorte que le système est rationnellement indépendant.

8. — Toute fonction de la forme

$$(9) \quad \sum_{i=0}^{\alpha-1} u_i \eta_{\alpha i} + \sum_{j=0}^{\beta-1} v_j \eta_{\beta j} + \sum_{k=0}^{\gamma-1} w_k \eta_{\gamma k} = \eta$$

dans laquelle le u_i , v_j et w_k sont des fonctions rationnelles de x finies pour $x = a$, est, aux points A_α , A_β et A_γ , d'ordre respectivement au moins égal à λ_α , λ_β et λ_γ .

Dans le cas où les u_i par exemple ne sont pas tous finis pour $x = a$, l'ordre de la fonction η au point A_α est nécessairement inférieur à λ_α . Supposons, en effet, que les fonctions rationnelles u_i deviennent respectivement infinies d'ordre r_i en $x = a$. Si η est d'ordre au moins égal à λ_α au point A_α , il en est de même de la fonction $(x - a)^{r-1} \eta$, où r désigne la plus grande des quantités positives r_i . Or, développées dans le voisinage de $x = a$, les fonctions rationnelles $(x - a)^{r-1} u_i$, sans que toutes les constantes C_i soient nulles, peuvent s'écrire

$$(x - a)^{r-1} u_i = \frac{C_i}{x - a} + \dots$$

Les premiers termes du développement $(x - a)^{r-1} \eta^{(1)}$ sont, sans réduction possible :

$$C_0 (x - a)^{\frac{\lambda_\alpha}{\alpha} - 1} + \dots + C_i (x - a)^{\frac{\lambda_\alpha + i}{\alpha} - 1} + \dots + C (x - a)^{\frac{\lambda_\alpha + \alpha - 1}{\alpha} - 1}$$

et la fonction $(x - a)^{r-1} \eta$, au point A_α , ne peut être que d'ordre inférieur à λ_α .

On aboutit aux mêmes conclusions pour les v_j et les w_k . Nous pouvons donc affirmer que toujours, et dans le cas seulement où les u_i , v_j et w_k sont fonctions rationnelles entières pour $x = a$, la fonction η est respectivement aux points A_α , A_β et A_γ , d'ordre au moins égal à λ_α , λ_β et λ_γ .

Toute fonction η , qui admet le diviseur $A_\alpha^{\lambda_\alpha} A_\beta^{\lambda_\beta} A_\gamma^{\lambda_\gamma}$ relatif à $x = a$, peut donc se mettre sous la forme (9), dans laquelle les fonctions rationnelles u_i , v_j et w_k restent finies pour $x = a$. Seules, ces fonctions η peuvent, d'autre part, être exprimées ainsi.

A tout système, tel que celui des $\eta_{\alpha i}$, $\eta_{\beta j}$, $\eta_{\gamma k}$, nous donnerons en conséquence le nom de *système fondamental pour $x = a$ relativement au diviseur $A_\alpha^{\lambda_\alpha} A_\beta^{\lambda_\beta} A_\gamma^{\lambda_\gamma}$* .

9. — Pour qu'un système soit fondamental pour $x = a$ relativement à un diviseur donné $\mathfrak{A} = A_\alpha^{\lambda_\alpha} A_\beta^{\lambda_\beta} A_\gamma^{\lambda_\gamma}$, il faut et il suffit

- 1° que chacune des fonctions du système admettent le diviseur $\mathfrak{A}$, et que
- 2° le déterminant de celui-ci soit divisible exactement par

$$(x - a)^{\lambda_\alpha + \lambda_\beta + \lambda_\gamma + \frac{\alpha-1}{2} + \frac{\beta-1}{2} + \frac{\gamma-1}{2}}$$

où $\alpha = 1$, $\beta = 1$, $\gamma = 1$ sont les ordres des points de ramification A_α , A_β , A_γ .

Cet énoncé suppose expressément qu'à $x = a$ ne correspondent que trois points de ramification A_α , A_β et A_γ et s'étend facilement au cas d'un nombre quelconque. Le sens des mots *divisible exactement* ressort de ce qui va suivre.

La première des conditions est évidemment nécessaire.

Si donc les deux systèmes (η_h) et (ζ_j) sont fondamentaux pour le diviseur $\mathcal{A}$, il faudra tout d'abord que dans les relations

$$\eta_h = \sum_{j=1}^n a_{hj} \zeta_j \qquad \zeta_i = \sum_{h=1}^n b_{ih} \eta_h$$

qui les relient l'un à l'autre, les fractions rationnelles a_{hj} et b_{ih} restent finies pour $x = a$. On voit aussi que le déterminant $|a_{hj}|$ ne peut devenir ni nul ni infini pour $x = a$.

Les développements des deux déterminants $|\eta_h^{(i)}|$ et $|\zeta_i^{(k)}|$, dans le voisinage de $x = a$, doivent en conséquence commencer par une même puissance de $x - a$. D'après (8), ce ne peut être que

$$(x - a)^{\lambda_\alpha + \lambda_\beta + \lambda_\gamma + \frac{\alpha-1}{2} + \frac{\beta-1}{2} + \frac{\gamma-1}{2}}$$

puisque le système $(\eta_{\alpha i} \eta_{\beta j} \eta_{\gamma k})$ est fondamental. La nécessité de la seconde des conditions se trouve par le fait établie.

Comme toutes deux sont suffisantes, la démonstration est achevée.

§ 13. — Idéaux et solution du problème fondamental.

1. — Par *idéal* on entend un ensemble de fonctions qui

1° sont, en des points déterminés situés par hypothèse à distance *finie* sur R_x , d'ordres respectivement aux moins égaux à des entiers donnés quelconques (positifs, nuls ou négatifs), et qui

2° aux autres points situés à distance *finie* sur R_x , sont toutes *régulières*.

Si α représente une fonction d'un idéal quelconque et $\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_n$, n fonctions entières rationnellement indépendantes du corps $E(x, y)$, les fonctions $\alpha\omega_1, \alpha\omega_2, \dots, \alpha\omega_n$ appartiennent à ce même idéal, et sont à leur tour rationnellement indépendantes. Tout idéal renferme donc des systèmes de n fonctions rationnellement indépendantes.

Soit $\eta_1, \eta_2, \dots, \eta_n$ l'un d'entre eux. Il peut arriver que toutes les fonctions de l'idéal, et ces fonctions-là seulement, puissent se mettre sous la forme $u_1\eta_1 + u_2\eta_2 + \dots + u_n\eta_n$, dans laquelle les $u_1, u_2, \dots, u_n$ représentent des polynômes entiers en x . Nous disons alors que le système $\eta_1, \eta_2, \dots, \eta_n$ est un *système fondamental* ou *base* de l'idéal considéré.

2. — A tout diviseur

$$\mathfrak{D} = A^{\lambda} A'^{\lambda'} \dots A^{(\nu)}{}^{\lambda^{(\nu)}}$$

dans lequel les lettres A, ... A^(ν) sont représentatives de points analytiques de R_x tous situés dans le fini, correspond un idéal déterminé I. Dès lors le problème du § 11, 1 peut s'énoncer :

Trouver toutes les fonctions de l'idéal I, relatif à D, finies aux n points supposés simples à l'infini de R_x.

Nous pourrions donc le considérer comme résolu, si nous arrivons à construire un système fondamental de l'idéal I, permettant de mettre à part les fonctions de I finies à l'infini.

Nous passons tout d'abord à la construction d'un tel système. Pour cela, nous pouvons supposer que :

1° $a_1, a_2, a_3, \dots$ étant les valeurs finies de x qui correspondent aux points A, A', A'' ... A^(ν), toutes les lettres représentatives des points analytiques correspondant à ces mêmes valeurs a_i figurent aussi dans ce diviseur D, affectées s'il le faut de l'exposant zéro ;

2° toutes les lettres représentatives des points de ramification de R_x figurent également dans D.

Un diviseur relatif à $x = a_j$

$$\mathfrak{A}_j = A_{\alpha_j}^{\lambda_{\alpha_j}} A_{\beta_j}^{\lambda_{\beta_j}} \dots A_{\nu_j}^{\lambda_{\nu_j}}$$

renferme toutes les lettres qui correspondent aux points A_{α_j}, A_{β_j}, ... A_{ν_j} superposés en $x = a_j$. L'indice α_j dans A_{α_j} doit rappeler qu'autour de A_{α_j} se permutent α_j racines de l'équation F(y, x) = 0 qui donne naissance au corps E(x, y).

Nous écrivons maintenant :

$$\mathfrak{D} = \Pi \mathfrak{A}_j = \mathfrak{A}_1 \mathfrak{A}_2 \dots \mathfrak{A}_q,$$

ce produit étant étendu à un nombre fini de facteurs A_j, tous relatifs à des valeurs finies de x , parmi lesquelles toutes celles qui correspondent aux points de ramification de R_x. A chaque A_j correspond un système fondamental $\eta_{j1}, \eta_{j2}, \dots, \eta_{jn}$ de même nature que le système (6) du § 12, 7.

3. — Ceci dit, si $\varphi(x)$ est une fonction rationnelle de x , quelconque, finie et différente de zéro pour $x = a_j$, le système

$$\varphi(x)\eta_{j1} \quad \varphi(x)\eta_{j2} \dots \varphi(x)\eta_{jn}$$

est (§ 12, 9), encore fondamental pour $x = a_j$, relativement à A_j.

Si nous choisissons l'entier positif k suffisamment grand, il en sera de même du système

$$\varphi(x)\eta_{j1} + (x - a)^k \zeta_1, \dots \varphi(x)\eta_{j2} + (x - a)^k \zeta_2, \dots \varphi(x)\eta_{jn} + (x - a)^k \zeta_n,$$

dans lequel $\zeta_1, \zeta_2, \dots, \zeta_n$ représentent des fonctions quelconques de $E(x, y)$.

Si nous posons en conséquence

$$F(x) = \Phi(x) (x - a_1)^{k_1} (x - a_2)^{k_2} \dots (x - a_q)^{k_q}$$

où $\Phi(x)$ représente un polynôme en x qui ne s'annule pas pour $x = a_1, a_2, \dots, a_q$, et $k_1, k_2, \dots, k_q$ des entiers positifs *suffisamment grands*, nous voyons que le système

$$\eta_i = \frac{F(x)}{(x - a_1)^{k_1}} \eta_{1i} + \frac{F(x)}{(x - a_2)^{k_2}} \eta_{2i} + \dots + \frac{F(x)}{(x - a_j)^{k_j}} \eta_{ji} + \dots + \frac{F(x)}{(x - a_q)^{k_q}} \eta_{qi}$$

($i = 1, 2, \dots, n$)

sera fondamental pour chacune des valeurs $a_1, a_2, \dots, a_q$ relativement à chacun des diviseurs, $\mathfrak{A}_1, \mathfrak{A}_2, \dots, \mathfrak{A}_q$. Quant au polynôme $\Phi(x)$, nous le supposons choisi de façon que les fonctions $\eta_1, \eta_2, \dots, \eta_n$ soient entières pour toute valeur finie $x = b$, dont les lettres représentatives des points analytiques correspondants $B_1, B_2, \dots, B_n$ ne figurent pas dans $\mathfrak{D}$.

Le discriminant du système $\eta_1, \eta_2, \dots, \eta_n$ ainsi construit, restera fini pour *toutes* ces valeurs $x = b$. Il peut se faire que pour chacune d'elles, il soit différent de zéro.

4. — Dans ce cas (§ 12. 9) toute fonction de la forme

$$u_1 \eta_1 + u_2 \eta_2 + \dots + u_n \eta_n$$

pour laquelle les fonctions rationnelles $u_1, u_2, \dots, u_n$ restent finies pour toute valeur finie de x , admettra le diviseur $\mathfrak{D}$ et sera régulière en tout point à distance finie, dont la lettre représentative ne figurera pas dans $\mathfrak{D}$.

Réciproquement, toute fonction de $E(x, y)$ satisfaisant à ces deux conditions, sera de la forme ci-dessus. Or les fonctions rationnelles $u_1, u_2, \dots, u_n$, restant finies pour toute valeur finie de la variable, sont nécessairement des polynômes, de sorte que le système $\eta_1, \eta_2, \dots, \eta_n$ sera fondamental pour l'idéal I.

5. — Si, au contraire, le déterminant $\left| \eta_i^{(k)} \right|$ n'est pas différent de zéro pour toute valeur b , il ne s'annulera en tous cas que pour un nombre fini :

$$(1) \quad b_1, b_2, \dots, b_r$$

de ces valeurs de x . Son carré $\left| \eta_i^{(k)} \right|^2$ n'est pas autre chose en effet qu'une fonction rationnelle de x .

Le système $\eta_1, \eta_2, \dots, \eta_n$ n'est alors pas fondamental pour l'idéal I. Cependant voici comment, par un nombre fini de transformations, l'on peut obtenir un système qui le soit.

Nous prenons $x = b_1$ et examinons tout d'abord si le système $\eta_1, \eta_2, \dots, \eta_n$ est normal pour cette quantité là: Si ce n'est pas le cas, comme à $x = b_1$ ne correspondent que des points simples de R_x , nous pouvons (§ 11. 4) effectuer les transformations nécessaires pour qu'il le devienne.

Soit $\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_n$ le système normal ainsi obtenu. Nous écrivons, sans que les constantes $a_i^{(\mu)}$ soient toutes nulles,

$$\theta_i^{(\mu)} = a_i^{(\mu)} (x - b_1)^{\rho_i} + \dots$$

($i = 1, 2, \dots, n$)

et avons

$$(2) \quad |a_i^{(\mu)}| \neq 0$$

Les exposants ρ_i sont tous entiers, de sorte que le système de fonctions

$$\zeta_i = \frac{\theta_i}{(x - b_1)^{\rho_i}}$$

($i = 1, 2, \dots, n$)

appartient encore à $E(x, y)$. Chaque fonction ζ_i est entière et le déterminant $|\zeta_i^{(\mu)}|$ fini et différent de zéro pour $x = b_1$; c désignant un certain facteur constant, l'on a en outre :

$$(3) \quad (x - b_1)^{\rho_1 + \rho_2 + \dots + \rho_n} |\zeta_i^{(\mu)}| = |\theta_i^{(\mu)}| = c |\gamma_i^{(\mu)}|$$

Le système $\zeta_1, \zeta_2, \dots, \zeta_n$ est encore fondamental pour chacune des valeurs $a_1, a_2, \dots, a_q$, qui correspondent aux diviseurs $\mathfrak{A}_1, \mathfrak{A}_2, \dots, \mathfrak{A}_q$. Ses fonctions sont entières pour toute valeur finie b , dont les lettres représentatives des points analytiques correspondants ne sont pas compris dans $\mathfrak{D}$. Les seules valeurs b , qui annulent encore son déterminant sont, à cause de (1), (2) et (3) : $b_2, b_3, \dots, b_r$.

Nous pouvons donc, après un nombre fini de transformations, aboutir à un système tel que celui considéré dans 4, et, ici encore, par conséquent le problème sera résolu.

6. — Tout système équivalent à un système fondamental, base d'un idéal I , est lui-même fondamental.

Nous aurons donc toujours (§ 11. 5), dans le cas où tous les points à l'infini de R_x sont simples, des systèmes fondamentaux, bases de I , normaux pour $x = \infty$.

7. — Mettre à part les fonctions de I qui restent finies pour $x = \infty$ est maintenant chose facile.

Soit $\eta_1, \eta_2, \dots, \eta_n$ un système fondamental pour I , normal pour $x = \infty$. Nous pouvons supposer les notations choisies de telle sorte que l'on ait :

$$\rho_1 \geq \rho_2 \geq \rho_3 \dots \geq \rho_n$$

où ρ_i représente l'exposant de η_i .

Si ρ_s est alors le dernier des exposants ρ_i qui soit encore positif ou nul, toutes les fonctions de I , qui restent finies à l'infini, sont comprises dans la formule

$$(4) \quad u_1 \eta_1 + u_2 \eta_2 + \dots + u_s \eta_s$$

dans laquelle les degrés respectifs $r_1, r_2, \dots, r_s$ des polynômes entiers $u_1, u_2, \dots, u_s$, doivent vérifier les inégalités.

$$(5) \quad \begin{matrix} -r_i + \rho_i \geq 0. \\ (i = 1, 2, \dots, s) \end{matrix}$$

Cela en vertu du théorème énoncé (§ 11. 6).

Nous exprimons ce résultat d'une autre manière en remarquant que toute fonction de la forme (4), dans laquelle les entiers r_i vérifient les inégalités (5), peut être envisagée comme une fonction linéaire à coefficients constants des

$$\begin{aligned} N &= (\rho_1 + 1) + (\rho_2 + 1) + \dots + (\rho_s + 1) \\ \text{fonctions} \quad & r_{ii}, \omega r_{ii}, \dots, \omega^{\rho_i} r_{ii} \quad (i = 1, 2, \dots, s). \end{aligned}$$

Ces N fonctions, que, dans un ordre quelconque, nous désignons par $\zeta_1, \zeta_2, \dots, \zeta_N$, sont linéairement indépendantes. Toute fonction multiple de $\mathfrak{D}$ pourra donc se mettre, mais d'une seule façon sous la forme

$$C_1 \zeta_1 + C_2 \zeta_2 + \dots + C_N \zeta_N$$

où $C_1, C_2, \dots, C_N$ sont des facteurs constants.

Le problème énoncé au § 11. 1 est maintenant complètement résolu. Nous n'en ferons aucune application. Il peut servir de base à la théorie des fonctions algébriques d'une variable. Cela suffit à en justifier l'importance.

Vu et approuvé :

Paris, le 16 mai 1904.

LE DOYEN DE LA FACULTÉ DES SCIENCES,

PAUL APPELL.

Vu et permis d'imprimer :

LE VICE-RECTEUR DE L'ACADÉMIE DE PARIS,

L. LIARD.

SECONDE THÈSE

PROPOSITIONS DONNÉES PAR LA FACULTÉ

**Mouvement d'un corps pesant autour d'un point fixe dans le cas
traité par M^{me} Kowaleski.**

Vu et approuvé :

Paris, le 16 mai 1904.

LE DOYEN DE LA FACULTÉ DES SCIENCES,
PAUL APPELL.

Vu et permis d'imprimer :

LE VICE-RECTEUR DE L'ACADÉMIE DE PARIS,
L. LIARD.

TABLE DES MATIÈRES

INTRODUCTION	Page 1
------------------------	-----------

PREMIÈRE PARTIE

§ 1. Les polynômes en y — Définitions préliminaires et règles de calcul	4
§ 2. Diagrammes de Newton	9
§ 3. Examen de certains cas de réductibilité.	13
§ 4. Equivalences et ensemble E	24
§ 5. Fonctions entières de E	31
§ 6. Fonctions d'ordre minimum	35
§ 7. Forme nécessaire de y_0	39

DEUXIÈME PARTIE

§ 8. Remarques préliminaires	42
§ 9. Détermination effective des racines d'une équivalence	45
§ 10. Démonstration de convergence	51

TROISIÈME PARTIE

§ 11. Généralités, problème fondamental, systèmes équivalents et systèmes normaux	57
§ 12. Systèmes fondamentaux relatifs à $x \equiv a$	60
§ 13. Idéaux et solution du problème fondamental	68

SAINT-AMAND, CHER. — IMPRIMERIE. BUSSIÈRE.
